

**F U N D A Ç Ã O
GETULIO VARGAS**

EPGE

Escola de Pós-Graduação
em Economia

Ensaio Econômico

Escola de

Pós-Graduação

em Economia

da Fundação

Getulio Vargas

Nº 351

ISSN 0104-8910

**Introdução à Integração Estocástica (Re-
visado em Julho de 1999)**

Paulo Klinger Monteiro

Agosto de 1999

URL: <http://hdl.handle.net/10438/412>

Os artigos publicados são de inteira responsabilidade de seus autores. As opiniões neles emitidas não exprimem, necessariamente, o ponto de vista da Fundação Getulio Vargas.

ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA

Diretor Geral: Renato Fragelli Cardoso

Diretor de Ensino: Luis Henrique Bertolino Braidó

Diretor de Pesquisa: João Victor Issler

Diretor de Publicações Científicas: Ricardo de Oliveira Cavalcanti

Klinger Monteiro, Paulo

Introdução à Integração Estocástica (Revisado em Julho de 1999)/ Paulo Klinger Monteiro - Rio de Janeiro : FGV,EPGE, 2010

(Ensaio Econômico; 351)

Inclui bibliografia.

CDD-330

Introdução à integração estocástica.

Paulo Klinger Monteiro¹

Revisão: Julho de 1999

¹Agradeço os comentários de Flávio Menezes(ANU), Clóvis de Faro(EPGE-FGV), Marco Bonomo(EPGE-FGV) e Renato Flores(EPGE-FGV).

<i>CONTENTS</i>	1
-----------------	---

Contents

1	Notação.	3
2	Espaços de probabilidades.	5
3	Independência.	14
4	Processos estocásticos.	15
5	Martingalas e esperança condicional.	16
6	Integral estocástica.	19
7	A fórmula de Black-Scholes	30
8	A fórmula de Feynman-Kac.	31
9	Integração estocástica em várias dimensões.	32
10	A fórmula de Girsanov.	40
	10.1 Princípio do máximo para equações elípticas.	42
11	Exercícios.	46
12	Tabela de símbolos	53

Prefácio.

A integração estocástica é a ferramenta básica para o estudo do apregoamento de ativos derivados¹ nos modelos de finanças de tempo contínuo. A fórmula de Black e Scholes é o exemplo mais conhecido. Os movimentos de preços de ações, são frequentemente modelados – tanto teoricamente quanto empiricamente – como seguindo uma equação diferencial estocástica. O livro texto de D. Duffie, “Dynamic asset pricing theory”, usa livremente conceitos como o teorema de Girsanov e a fórmula de Feynman-Kac.

Um conhecimento básico da integração estocástica é cada vez mais necessário para quem quer acompanhar a literatura moderna em finanças.

Esta introdução à integração estocástica é dirigida para alunos de doutorado e no final de mestrado. Um conhecimento sólido² de continuidade, limites e facilidade de operar com a notação de conjuntos é fundamental para a compreensão do texto que se segue. Um conhecimento básico de integral de Lebesgue é recomendável. No entanto incluí no texto as definições básicas e os resultados fundamentais da teoria da integral de Lebesgue usados no texto.

¹Opções por exemplo.

²No nível do livro de R. Bartle, “The elements of real analysis”, John Wiley & Sons.

1 Notação.

A notação usada é na sua maior parte padrão.

Números.

Denoto por \mathbb{R} o conjunto dos números reais, por \mathbb{Q} o conjunto dos números racionais e \mathbb{N} o conjunto dos números naturais $\{1, 2, \dots\}$. Frequentemente precisamos considerar o conjunto dos números reais acrescido dos pontos ∞ e $-\infty$. Definimos $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. E $[-\infty, \infty] = \bar{\mathbb{R}}$. As definições de soma, multiplicação e de ordem são extendidas a $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ de modo natural:

1. $x + \infty = \infty$ se $x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$;
2. $x - \infty = x + (-\infty) = -\infty$ se $x \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$;
3. A diferença $\infty - \infty$ não é definida;
4. $x \cdot \infty = \infty$ se $x \in (0, \infty]$ e $x \cdot \infty = -\infty$ se $x \in (-\infty, 0)$;
5. $-\infty < x < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O módulo de um número real x é denotado $|x|$. A parte positiva de x é denotada $x^+ = \max\{x, 0\}$ e a parte negativa $x^- = \max\{-x, 0\}$. É claro que $|x| = x^+ + x^-$.

Funções e seqüências.

Se f é uma função entre os conjuntos A e B escrevemos $f : A \rightarrow B$. Se A e B são conjuntos de números reais dizemos que a função f é estritamente crescente se $a < b$ implicar $f(a) < f(b)$. E f é crescente (ou às vezes dita não-decrescente) se $a < b$ implicar $f(a) \leq f(b)$. Uma seqüência de números reais $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é denotada por $(x_n)_n$. Se a seqüência tiver limite este será denotado por $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Se $(x_n)_n$ é uma seqüência e $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é uma função estritamente crescente podemos formar a nova seqüência $(x_{k(n)})_n$ cujo n -ésimo termo é $x_{k(n)}$. Se uma seqüência tem limite toda subsequência tem o mesmo limite. Se $(x_n)_n$ é uma seqüência sempre existe $\bar{x} = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in \bar{\mathbb{R}}$. O limite superior de $(x_n)_n$ é caracterizado pelas propriedades:

1. Existe subsequência $(x_{k(n)})_n$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k(n)} = \bar{x}$;
2. Se a subsequência $(x_{k(n)})_n$ converge então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k(n)} \leq \bar{x}$.

De maneira análoga definimos $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$, o menor limite de uma subsequência de $(x_n)_n$. Uma seqüência é convergente se e somente se $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$.

Conjuntos.

Se A e B são conjuntos denoto por:

1. $A \cup B$ a união de A e B ;
2. $A \setminus B$ a diferença de A por B .
3. Se $A \subset \Omega$, $A^c = \Omega \setminus A$ denota o complementar de A em relação à Ω .
4. $A \cap B$ a intersecção de A e B .
5. $A \times B$ o produto cartesiano de A e B
6. $\mathcal{P}(\Omega)$ o conjunto dos subconjuntos de Ω .
7. $A \Delta B$ a diferença simétrica dos conjuntos A e B .

Se $A_n, n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de conjuntos denoto por:

1. $A_n \uparrow A$ se $A_n \subset A_{n+1}$ para todo n e $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
2. $A_n \downarrow A$ se $A_{n+1} \subset A_n$ para todo n e $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
3. $\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{p=k}^{\infty} A_p$ e $\liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{p=k}^{\infty} A_p$.

Se I é um conjunto não vazio de índices e $\mathcal{X} = \{X_i; i \in I\}$ é uma família de conjuntos, a união da família \mathcal{X} é denotada $\bigcup_{i \in I} X_i = \{x; \text{existe } i \in I, x \in X_i\}$. A intersecção é denotada $\bigcap_{i \in I} X_i = \{x; x \in X_i, \text{para todo } i \in I\}$. O produto cartesiano de \mathcal{X} é denotado por

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i; f(i) \in X_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Se $A \subset \Omega$ é um conjunto definimos a função indicadora de A , $\chi_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ por

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A, \\ 0 & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

Classes de diferenciabilidade.

Suponhamos $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f = (f_1, \dots, f_m) : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciável. Dize-mos que f é de classe C^1 se a derivada f' for uma função contínua. A função f é C^1 se e somente existem e são contínuas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$. O operador Laplaciano de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é denotado $\Delta f := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Norma no \mathbb{R}^n e em espaços mais gerais.

Seja V um espaço vetorial real. Uma norma em V é uma função $|\cdot| : V \rightarrow \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

1. $|v| = 0$ implica $v = 0$;
2. $|v + w| \leq |v| + |w|$ para todo $v, w \in V$. (desigualdade triangular);
3. $|rv| = |r||v|$ se $r \in \mathbb{R}$ e $v \in V$.

Um espaço vetorial munido de uma norma é chamado de espaço normado.

Exemplo 1 No \mathbb{R}^n podemos definir várias normas. A norma da soma é definida por $|x|_S = |x_1| + \dots + |x_n|$ se $x \in \mathbb{R}^n$. A norma do máximo é definida por $|x|_M = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$. E finalmente a norma mais utilizada no \mathbb{R}^n é a norma euclidiana: $|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$. Se \mathcal{M} é o espaço vetorial das matrizes $m \times n$ definimos a norma da matriz $A = (a_{ij})_{i \leq m, j \leq n}$ por $|A| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$.

Mais tarde veremos outros exemplos de normas como a norma do espaço L^p .

Espaço de Banach.

Seja $(V, |\cdot|)$ um espaço normado.

Definição 1 1. Uma sequência $(x_n)_n$ em V converge para $x \in V$ se para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo índice $n \geq N$ vale que $|x_n - x| < \epsilon$.

2. Uma sequência $(x_n)_n$ em V é de Cauchy se para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro N tal que se $m \geq N$ e $n \geq N$ então $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Se uma sequência converge o seu limite é único. Toda sequência convergente é de Cauchy. A recíproca entretanto não é verdadeira.

Definição 2 (Espaço de Banach) Um espaço normado V é um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em V for convergente.

Os exemplos mais importantes de espaços de Banach são os espaços L^p .

2 Espaços de probabilidades.

Nesta seção apresento de maneira condensada as definições e resultados da teoria da integral de Lebesgue, necessários para o entendimento da integração estocástica. O livro do Robert G. Bartle, "The elements of integration" é uma ótima referência para quem nunca estudou teoria da medida. Os resultados e as definições nesta seção foram sempre que possível particularizados para espaços de probabilidade.

Definição 3 Se Ω é um conjunto, uma álgebra em Ω é uma família $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ que satisfaz às seguintes propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A}$ implica $A^c \in \mathcal{A}$;
3. Se $\{A_1, \dots, A_N\} \subset \mathcal{A}$ então $\cup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{A}$.

Se além disso, \mathcal{A} for fechada para uniões enumeráveis de elementos de \mathcal{A} dizemos que \mathcal{A} é uma σ -álgebra.

Observação 1 Se \mathcal{A} é uma álgebra então é imediato de se verificar que se $A, B \in \mathcal{A}$ então $A \cap B, A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$. Uma σ -álgebra é fechada por intersecção enumeável.

Um par ordenado (Ω, \mathcal{A}) formado pelo conjunto Ω e a σ -álgebra \mathcal{A} é chamado de espaço mensurável. Os elementos de \mathcal{A} são os conjuntos mensuráveis ou eventos. O conjunto Ω é também chamado de espaço amostral.

Exemplo 2 O leitor facilmente verificará os exemplos a seguir de espaços mensuráveis.

1. $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$;
2. (X, \mathcal{X}) sendo X um conjunto não enumerável e \mathcal{X} a σ -álgebra formada pelos subconjuntos enumeráveis de X e os seus complementos.
3. $(\Omega, \cap_{t \in T} \mathcal{A}_t)$ sendo \mathcal{A}_t uma σ -álgebra para todo $t \in T$. Ou seja a intersecção de σ -álgebra é uma σ -álgebra.

Proposição 1 (A σ -álgebra gerada por um conjunto.) Dado um subconjunto $\mathbf{U} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ existe $\sigma(\mathbf{U})$, a menor σ -álgebra de Ω que contém \mathbf{U} .

Demonstração: Seja $\Gamma = \{\mathcal{C}; \mathcal{C} \supset \mathbf{U} \text{ é uma } \sigma\text{-álgebra de } \Omega\}$. Então $\Gamma \neq \emptyset$ pois $\mathcal{P}(\Omega) \in \Gamma$. Portanto $\sigma(\mathbf{U}) := \cap_{\mathcal{C} \in \Gamma} \mathcal{C}$ é uma σ -álgebra por ser intersecção de σ -álgebras. E é a menor σ -álgebra que contém \mathbf{U} . QED

Definição 4 A σ -álgebra de Borel no \mathbb{R}^n , \mathcal{B}_n , é a menor σ -álgebra do \mathbb{R}^n que contem $\Pi_{i=1}^n (a_i, b_i)$, sendo $(a_i, b_i) \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto.

Definição 5 Uma função $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é mensurável se :

1. $f^{-1}(\infty) \in \mathcal{A}$ e $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{A}$;
2. $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B} = \mathcal{B}_1$.

Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é mensurável dizemos que f é uma variável aleatória. Para verificar que uma função é mensurável basta verificar para conjuntos B num conjunto que gere a σ -álgebra dos boreanos. Portanto para verificar que uma função real f é mensurável basta verificar que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para $B = (-\infty, a)$, $a \in \mathbb{Q}$. Mais geralmente $f : \Omega \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ é mensurável se $f^{-1}([-\infty, z)) \in \mathcal{A}$ para todo z racional.

Proposição 2 *A soma de funções mensuráveis é mensurável. O produto de funções mensuráveis é mensurável. Se f é mensurável então $|f|$ é mensurável.*

Em geral toda função contínua é mensurável. Toda função monótona é mensurável. A função indicadora, χ_E é mensurável se e somente se $E \in \mathcal{A}$.

Proposição 3 *Se $(f_n)_n$ é uma sequência de funções mensuráveis então:*

1. $\inf_n f_n$ e $\sup_n f_n$ são mensuráveis.
2. $\liminf_n f_n$ e $\limsup_n f_n$ são mensuráveis.
3. Se existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$ então $f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ é mensurável.

Definição 6 *Uma função com valores reais é simples se sua imagem é um conjunto finito. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é simples e mensurável então f pode ser escrita na forma: $f = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$, $E_j \in \mathcal{A}$.*

Na representação de uma função simples podemos supor que os a_j são distintos e que os conjuntos E_j são dois a dois disjuntos. Nesse caso a representação de f é única.

O lema a seguir é fundamental para a definição da integral de Lebesgue.

Lema 1 *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ mensurável. Existe então uma sequência g_n de variáveis aleatórias tais que:*

1. $0 \leq g_n(\omega) \leq g_{n+1}(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$ e $n \geq 1$;
2. $f(\omega) = \lim_n g_n(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$;
3. g_n é uma função simples.

Demonstração: Para $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq k \leq n2^n$ seja

$$E_{kn} = \left\{ \omega \in \Omega; \frac{k}{2^n} \leq f(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \right\},$$

para $k < n2^n$ e $E_{(n2^n)n} = \{\omega \in \Omega; f(\omega) \geq n\}$. Os conjuntos E_{kn} são dois a dois disjuntos, $\cup_k E_{kn} = \Omega$. Definamos

$$g_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{kn}}(\omega).$$

É imediato de se verificar que g_n satisfaz as propriedades desejadas.

Definição 7 (Probabilidade.) Uma (medida de) probabilidade é uma função $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ tal que

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. P é contavelmente aditiva: Se $\{E_n; n \in \mathbb{N}\}$ é uma família de eventos, dois a dois disjuntos então $P(\cup_n E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$.

Proposição 4 Se P é uma medida de probabilidade então:

1. $P(\Omega) = 1$;
2. $P(A^c) = 1 - P(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$;
3. Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$;
4. Se $A_n \uparrow A$ então $P(A) = \lim_n P(A_n) = \sup_n P(A_n)$.
5. Se $A_n \downarrow A$ então $P(A) = \lim_n P(A_n) = \inf_n P(A_n)$.
6. $P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n) \leq \limsup P(A_n) \leq P(\limsup A_n)$.
7. $P(\cup_n A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Exemplo 3 1. Suponhamos $(\Omega, \mathcal{A}) = ([0, 1], \mathcal{B}[0, 1])$. Existe uma única probabilidade $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, 1]$ tal que $\mu((a, b)) = b - a$ para todo intervalo $(a, b) \subset [0, 1]$.

2. Suponhamos que $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e crescente tal que $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$. Existe então uma única probabilidade λ_f definida nos boreleanos tal que $\lambda_f((a, b)) = f(b) - f(a)$ para todo $a < b$. A probabilidade λ_f é chamada de medida de Borel-Stieltjes gerada pela f .

Um espaço de probabilidade é um terno (Ω, \mathcal{A}, P) , sendo \mathcal{A} uma σ -álgebra e P uma probabilidade em Ω . Dizemos que uma propriedade vale quase certamente em Ω se o conjunto N de pontos de Ω para os quais ela não é válida está contido num subconjunto $M \in \mathcal{A}$ tal que $P(M) = 0$. Assim por exemplo dizemos que duas funções mensuráveis $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ são iguais quase certamente se $P(\{\omega \in \Omega; f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0$. Se $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de probabilidade, podemos estender a σ -álgebra \mathcal{A} de um modo natural:

Definição 8 (Complemento de um espaço de probabilidade.) Definamos

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{B \subset \Omega; \text{ existe } C \in \mathcal{A} \text{ tal que } B \Delta C \subset N \in \mathcal{A}, P(N) = 0\}.$$

E definamos a probabilidade $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{A}} \rightarrow [0, 1]$ por $\tilde{P}(B) = P(C)$ se $C \in \mathcal{A}$ e $B \Delta C \subset N$, $P(N) = 0$.

É fácil de se ver que o complemento de $\tilde{\mathcal{A}}$ é $\tilde{\mathcal{A}}$.

Definição 9 (Integral de uma função simples.) *Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função simples. Então a integral de f com relação à probabilidade μ é definida por:*

$$\int f d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j).$$

Definição 10 (A integral de Lebesgue) *Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ é mensurável definimos a integral de f por*

$$\int f d\mu = \int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega) = \sup \left\{ \int \phi d\mu; 0 \leq \phi \leq f, \phi \text{ função simples} \right\}.$$

Se $A \in \mathcal{A}$ define-se a integral em A por $\int_A f d\mu = \int \chi_A f d\mu$.

Teorema 1 (Teorema da convergência monótona.) *Se $(f_n)_n$ é uma sequência monótona crescente de funções mensuráveis $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ que converge para f então*

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Teorema 2 (Lema de Fatou.) *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis não-negativas. Então*

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração: Seja $g_m = \inf\{f_p; p \geq m\}$. Portanto (g_m) é uma sequência crescente de funções mensuráveis. Como

$$\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu \text{ se } m \leq n,$$

temos que

$$\int g_m d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Portanto o teorema da convergência monótona implica que

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int g_m d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

QED

Uma função mensurável f , é integrável se $\int |f| d\mu < \infty$. É claro então que a parte positiva de f , $f^+ = \max\{f, 0\}$ e a parte negativa de f , $f^- = \max\{-f, 0\}$ são integráveis. Se f é integrável definimos a integral de f por

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Proposição 5 *Se f, g são integráveis e $r \in \mathbb{R}$ vale que:*

1.

$$\int (rf + g) d\mu = r \int f d\mu + \int g d\mu.$$

2. *Se $f \geq 0$ então $\int f d\mu \geq 0$.*

3.

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Teorema 3 (Teorema da convergência dominada.) *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis que converge quase certamente para uma função f . Se existe g integrável tal que $|f_n| \leq g$ para todo n então f é integrável e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Se \mathcal{F} é uma família de variáveis aleatórias existe $\tilde{\mathcal{A}} = \sigma(\mathcal{F})$, a menor σ -álgebra que torna toda função $f \in \mathcal{F}$ mensurável. Com efeito, a família

$$\Gamma = \{\mathcal{C}; \mathcal{C} \text{ é } \sigma\text{-álgebra de } \Omega \text{ e toda } f \in \mathcal{F} \text{ é } \mathcal{C} \text{ mensurável}\},$$

é não vazia, pois $\mathcal{A} \in \Gamma$. E portanto $\tilde{\mathcal{A}} = \cap_{\mathcal{C} \in \Gamma} \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ é uma σ -álgebra, pois é uma intersecção de σ -álgebras.

Espaços L^p .

Inicialmente definimos o espaço $L = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é } \mu \text{ integrável}\}$. Dizemos que $f, g \in L$ são equivalentes se $\mu(\{\omega \in \Omega; f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0$. A classe de equivalência de $f \in L$ é denotada $[f]$. Definimos então $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \{[f]; f \in L\}$. Se definirmos $\|[f]\|_1 = \int |f| d\mu$ obtemos um norma e portanto L^1 é um espaço normado. Mais do que isso vale o

Teorema 4 *O espaço $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de Banach.*

Uma generalização muito importante dos espaços L^1 são os espaços L^p , $1 \leq p \leq \infty$. Suponhamos inicialmente $1 \leq p < \infty$. O espaço $L^p = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é o conjunto das classes de equivalência $[f]$ sendo que $\int |f|^p d\mu < \infty$. A função $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ é uma norma no espaço L^p que é de Banach nessa norma.

Teorema 5 (Desigualdade de Hölder.) *Suponhamos que $f \in L^p$ e $g \in L^q$ sendo que $1 < p$, $1/p + 1/q = 1$. Então $fg \in L^1$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

No caso $p = 2 = q$ a desigualdade de Hölder se reduz à desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Teorema 6 (Desigualdade de Minkowski.) *Se f e g são mensuráveis então*
 $|f + g|_p \leq |f|_p + |g|_p$.

Também se usa muito o espaço L^∞ mas a definição da norma é um pouco diferente. Dizemos que uma função mensurável f , é essencialmente limitada se existe $M > 0$ tal que $\mu\{\omega \in \Omega; |f(\omega)| > M\} = 0$. O supremo essencial de f é então definido por

$$|f|_\infty = \inf\{M > 0; \mu\{\omega \in \Omega; |f(\omega)| > M\} = 0\}.$$

A função $|\cdot|_\infty$ é uma norma e o espaço L^∞ é o conjunto das classes de equivalências das funções essencialmente limitadas munido da norma $|\cdot|_\infty$. Este espaço é de Banach.

Tipos de convergência.

Os conceitos de convergência nos espaços de probabilidade são além dos usuais de convergência uniforme e de convergência pontual, os conceitos de convergência em probabilidade, quase certa e em L^p . Sejam $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$ e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis.

- a. A sequência $(f_n)_n$ converge uniformemente para f se para todo $\epsilon > 0$ existe um inteiro n_0 tal que para todo inteiro $n > n_0$ temos $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \epsilon$ para todo $\omega \in \Omega$.
- b. A sequência $(f_n)_n$ converge pontualmente para f se para todo $\omega \in \Omega$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$.
- c. A sequência $(f_n)_n$ converge quase certamente para f se convergir pontualmente para f exceto num conjunto mensurável de probabilidade nula.
- d. f_n converge para f em probabilidade se para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{\omega \in \Omega; |f_n(\omega) - f(\omega)| > \epsilon\}) = 0.$$

O limite em probabilidade, se houver, é único quase certamente. Mais precisamente se f e g são limites em probabilidade de f_n então $f = g$ quase certamente. Num espaço de probabilidade a convergência quase certa implica a convergência em probabilidade. A recíproca é parcialmente verdadeira: a convergência em probabilidade implica convergência em probabilidade numa subsequência.

Proposição 6 1. Se $X_n \xrightarrow{P} X$ então existe uma subsequência $(X_{k_n})_n$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_{k_n} = X$ quase certamente;

2. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ quase certamente, então $X_n \xrightarrow{P} X$.

Convergência em L^p .

Uma sequência $([f_n])_n$ em L^p converge para $[f]$ se convergir na norma de L^p , isto é, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$. As vezes dizemos que $[f_n]$ converge para $[f]$ na média de ordem p . A partir de agora serei menos cuidadoso na representação de elementos de L^p escrevendo f_n quando deveria escrever $[f_n]$. Esta imprecisão é muito conveniente e não causa nenhuma dificuldade sendo universalmente utilizada.

Teorema 7 *Se (f_n) é uma sequência em L^p que converge uniformemente para f então $f \in L^p$ e (f_n) converge para f em L^p .*

Teorema 8 *Suponhamos que $f_n \in L^p$ e $f_n \rightarrow f$ quase certamente. Se existe $g \in L^p$ tal que para todo n , $|f_n| \leq g$ quase certamente então $f \in L^p$ e $f_n \rightarrow f$ em L^p .*

Demonstração: Como f_n converge quase certamente para f temos que $|f| \leq g$ quase certamente também. Logo $f \in L^p$. Portanto para todo n temos que $|f_n - f|^p \leq 2^p g^p$, quase certamente. Logo pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f|^p d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n - f|^p d\mu = 0$. QED

Definição 11 (Sequência de Cauchy em probabilidade) *A sequência (f_n) é de Cauchy em probabilidade se*

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \mu(\omega \in \Omega; |f_n(\omega) - f_m(\omega)| \geq \epsilon) = 0$$

para todo $\epsilon > 0$.

Teorema 9 *Seja (f_n) uma sequência Cauchy em probabilidade. Então existe uma subsequência $(f_{k_n})_n$ que converge quase certamente e em probabilidade para uma certa função mensurável f .*

Corolário 1 *Toda sequência de Cauchy em probabilidade, é convergente em probabilidade. O limite é quase certamente único.*

Teorema 10 *Seja (f_n) uma sequência de funções em L^p que converge em probabilidade para f e seja $g \in L^p$ tal que $|f_n| \leq g$, quase certamente. Então $f \in L^p$ e (f_n) converge para f em L^p .*

Os resultados mais sofisticados de integração estocástica necessitam de teoremas mais gerais do que o teorema da convergência dominada de Lebesgue. O teorema de Vitali é a base destes resultados.

Teorema 11 (Teorema de convergência de Vitali.) *Suponhamos $1 \leq p < \infty$. E seja a sequência (f_n) em L^p . Então $f_n \rightarrow f$ em L^p se e somente se valem (i) e (ii) abaixo.*

- (i) (f_n) converge para f em probabilidade;
(ii) Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que se $B \in \mathcal{A}$ e $\mu(B) < \delta(\epsilon)$ então

$$\int_B |f_n|^p d\mu < \epsilon^p, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Igualdade de probabilidades.

Em geral é bem difícil de se verificar que duas probabilidades coincidem. O teorema de extensão de Hahn mostra que basta verificar que as probabilidades coincidem numa álgebra.

Teorema 12 (Teorema de extensão de Hahn.) *Suponhamos que μ é uma medida de probabilidade numa álgebra $\hat{\mathcal{A}}$. Então μ possui uma única extensão à $\sigma(\hat{\mathcal{A}})$. Em outras palavras, se duas medidas de probabilidade coincidem numa álgebra, elas coincidem na σ -álgebra gerada pela álgebra.*

Portanto por exemplo existe uma única medida em $[0, 1]$ tal que $\mu([c, d]) = d - c$ para todo $0 \leq c \leq d \leq 1$.

Medida produto e os teoremas de Fubini e Tonelli.

Definição 12 *Seja (A, \mathcal{A}) e (B, \mathcal{B}) dois espaços mensuráveis. Os subconjuntos de $A \times B$ da forma $X \times Y$, $X \in \mathcal{A}$, $Y \in \mathcal{B}$ são chamados de retângulos (ou retângulos mensuráveis).*

Seja $C = A \times B$ e C_0 o conjunto das uniões finitas de retângulos. É fácil de se checar que toda união finita de retângulos pode ser escrita como uma união finita disjunta de retângulos mensuráveis.

Lema 2 *A coleção C_0 é uma álgebra.*

Definição 13 *A σ -álgebra produto de (A, \mathcal{A}) e (B, \mathcal{B}) , denotada $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ é a menor σ -álgebra de $A \times B$ que contém C_0 , isto é, é a σ -álgebra gerada pelos retângulos.*

Teorema 13 *Suponhamos que (A, \mathcal{A}, P) e (B, \mathcal{B}, Q) são espaços de probabilidade. Existe então uma única medida de probabilidade π em $(A \times B, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ tal que $\pi(X \times Y) = P(X)Q(Y)$ para todo retângulo $X \times Y$.*

Definição 14 *Se $C \subset A \times B$ e $a \in A$ então a seção em a de C é o conjunto*

$$C_a = \{b \in B; (a, b) \in C\}.$$

Similarmente definimos a seção em b de C :

$$C_b = \{a \in A; (a, b) \in C\}.$$

Se $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in A$ definimos a seção em a de f por $f_a(b) = f(a, b)$ e a seção em $b \in B$ de f por $f_b(a) = f(a, b)$.

Lema 3 (a) Se $C \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ então cada seção de C é mensurável.

(b) Se f é mensurável de $A \times B$ em \mathbb{R} , então cada seção de f é mensurável.

Lema 4 Seja (A, \mathcal{A}, P) e (B, \mathcal{B}, Q) espaços de probabilidade. Se $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ então

$$f(a) = Q(E_a), g(b) = P(E_b)$$

são mensuráveis e

$$\int_A f dP = \pi(E) = \int_B g dQ.$$

Teorema 14 (Teorema de Tonelli.) Seja (A, \mathcal{A}, P) e (B, \mathcal{B}, Q) espaços de probabilidade. E seja $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}_+$ mensurável. Então

$$\int_A \left(\int_B f(a, b) dQ(b) \right) dP(a) = \int_{A \times B} f d\pi = \int_B \left(\int_A f(a, b) dP(a) \right) dQ(b).$$

Teorema 15 (Teorema de Fubini.) Se $\int_{A \times B} |f| d\pi < \infty$ então

$$\int_A \left(\int_B f(a, b) dQ(b) \right) dP(a) = \int_{A \times B} f d\pi = \int_B \left(\int_A f(a, b) dP(a) \right) dQ(b).$$

Observação 2 Note que se $f \geq 0$ o teorema de Tonelli é mais geral que o teorema de Fubini pois dispensa a hipótese de integrabilidade. O teorema de Fubini demonstra-se facilmente decompondo-se $f = f^+ - f^-$.

3 Independência.

Dizemos que dois eventos A e B são independentes se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Um conjunto finito de eventos $\{A_1, \dots, A_k\}$ é independente se para todo $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_t \leq k$ temos $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_t}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_t})$. Uma família, X_1, \dots, X_n de variáveis aleatórias do espaço (Ω, \mathcal{A}, P) é independente se para todos boreleanos B_1, \dots, B_n de \mathbb{R} temos

$$P(\cap_{i=1}^n \{\omega \in \Omega; X^i(\omega) \in B_i\}) = \prod_{i=1}^n P(\{\omega \in \Omega; X^i(\omega) \in B_i\}).$$

Mais geralmente a família $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ de σ -álgebras de Ω é independente se para todo $A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$,

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

Note que $\{A_1, \dots, A_k\}$ é independente se e somente se as σ -álgebras, $\mathcal{A}_i = \{A_i, A_i^c, \emptyset, \Omega\}$, $1 \leq i \leq k$ são independentes. A partir de agora usaremos com alguma frequência a notação $E[X]$ no lugar de $\int f(\omega) d\mu(\omega)$. Se X, Y

são variáveis aleatórias integráveis e independentes, então XY é integrável e $E[XY] = E[X]E[Y]$. No lema a seguir notemos que

$$\{\omega \in \Omega; \omega \in A_n \text{ i.v.}\} := \{\omega \in \Omega; \omega \in A_n \text{ infinitas vezes}\} = \limsup A_n.$$

Muito usado é o seguinte resultado:

Lema 5 (Borel-Cantelli) *Seja $(A_n)_n$ uma família de conjuntos mensuráveis. Então:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \text{ implica } P(A_n \text{ i.v.}) = 0.$$

Demonstração. Note que

$$P(A_n \text{ i.v.}) = P(\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} A_n) \leq P(\cup_{n=k}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n).$$

Portanto $P(A_n \text{ i.v.}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) = 0$. QED

O lema de Borel-Cantelli tem uma recíproca parcial que inclui o caso dos eventos A_n serem dois a dois independentes:

Lema 6 *Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$. Se $P(A_i \cap A_j) \leq P(A_i)P(A_j)$ sempre que $i \neq j$ então $P(A_n \text{ i.v.}) = 1$.*

4 Processos estocásticos.

A distribuição de uma variável aleatória X é a função $F = F_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\})$. Temos que F é não decrescente, $F(-\infty) = 0$ e $F(\infty) = 1$ e que F é contínua à direita. Se $X^2 \in L^1(P)$ podemos definir a variância de X por $E[(X - E[X])] = \int_{\Omega} (X - EX)^2 dP$. Assim se X e Y são independentes, então $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$. A variável aleatória X tem distribuição normal de média μ e variância $\sigma^2 > 0$ se

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Definição 15 *Uma filtração em (Ω, \mathcal{A}, P) é uma família crescente de σ -álgebras, $(\mathcal{A}_t)_t \subset \mathcal{A}$ tal que:*

1. $\mathcal{A}_t = \cap_{s>t} \mathcal{A}_s$ para todo $t \geq 0$;
2. \mathcal{A}_0 contém os subconjuntos nulos de \mathcal{A} .

Definição 16 *Um processo estocástico, $\{X_t\}_{t \geq 0}$, é uma família de variáveis aleatórias $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Um processo estocástico é adaptado se X_t é \mathcal{A}_t mensurável para todo t .*

Um movimento Browniano de média μ e variância σ^2 (também chamado de processo de Wiener), é um processo estocástico, $\{B_t\}_{t \geq 0}$, tal que:

1. $B_0 = 0$, quase certamente;
 2. Para todos $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $n \geq 1$, $B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ são independentes;
 3. Se $0 \leq s < t$, $B_t - B_s$ tem distribuição normal de média $(t-s)\mu$ e variância $(t-s)\sigma^2$;
 4. A trajetória, $t \rightarrow B_t(\omega)$ é contínua quase certamente em $\omega \in \Omega$.
- Se $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$ dizemos que o movimento Browniano é normalizado.

5 Martingalas e esperança condicional.

Esperança condicional.

Suponhamos que $X \in L^1(P)$ e \mathcal{B} é uma σ -álgebra de Ω contida em \mathcal{A} . Existe uma função $E(X|\mathcal{B}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{B} mensurável, tal que para todo $B \in \mathcal{B}$,

$$\int_B E(X|\mathcal{B})(\omega) dP(\omega) = \int_B X(\omega) dP(\omega).$$

A função $E(X|\mathcal{B})$ chama-se a esperança condicional de X dada a σ -álgebra \mathcal{B} . Valem as seguintes propriedades:

1. $E(X|\mathcal{B})$ é única a menos de um subconjunto $B \in \mathcal{B}$ de probabilidade nula.
2. $E(aX + bY|\mathcal{B})(\omega) = aE(X|\mathcal{B})(\omega) + bE(Y|\mathcal{B})(\omega)$ para quase todo $\omega \in \Omega$.
3. Se $X \geq 0$ então $E(X|\mathcal{B}) \geq 0$.
4. $E(1|\mathcal{B}) = 1$.
5. Se X é \mathcal{B} mensurável, então $E(X|\mathcal{B}) = X$ quase certamente. Mais geralmente $E(XY|\mathcal{B}) = XE(Y|\mathcal{B})$.
6. Se X é independente de \mathcal{B} e $X \in L^1$ então $E(X|\mathcal{B}) = EX$.
7. Se $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa, $E[\phi(X)|\mathcal{B}] \geq \phi(E[X|\mathcal{B}])$.

Tempo de Parada.

O conceito de tempo de parada é fundamental.

Definição 17 *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{A}_t)_t, P)$ um espaço de probabilidades com uma filtração. Uma função $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ é um tempo de parada se para todo $t \geq 0$, $\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{A}_t$.*

O exemplo a seguir ilustra a importância do conceito de tempo de parada.

Exemplo 4 *Suponha $(X_t)_{t \geq 0}$ um processo estocástico contínuo e adaptado. Seja $E = (-\infty, b]$. A primeira vez, $\tau_b(\omega)$, que $X_t(\omega)$ é maior que b , é um tempo de parada. De fato, por definição $\tau_b(\omega) = \inf\{t > 0; X_t(\omega) > b\}$. Logo $\{\omega \in \Omega; \tau_b(\omega) \leq t\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega; \tau_b(\omega) < t + 1/n\} = \cap_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega; \text{existe } s < t + 1/n, X_s(\omega) > b\} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{s \in \mathbb{Q}, s < t + 1/n} \{\omega \in \Omega; X_s(\omega) > b\} \in \cap_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_{t+1/n} = \mathcal{A}_t$.*

Proposição 7 *Se $\sigma, \tau, \tau_n, n \geq 1$ são tempos de parada então $\max\{\sigma, \tau\}, \min\{\sigma, \tau\}$, $\sup_n \tau_n$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} \tau_n$ são tempos de parada.*

A demonstração dessa proposição não é difícil e será omitida.

Martingalas.

Um processo estocástico adaptado, $(X_t)_{t \geq 0}$, é uma martingala com relação à filtração $(\mathcal{A}_t)_{t \geq 0}$, se

1. i
2. $X_t \in L^1(P)$ para todo t ;
3. $E(X_t | \mathcal{A}_s) = X_s$ para todo $t \geq s$.

Se no lugar da igualdade em (3) tivermos $E(X_t | \mathcal{A}_s) \geq X_s$ para todo $t \geq s$ dizemos que $(X_t)_t$ é uma sub-martingala.

As martingalas satisfazem a uma desigualdade muito útil:

Proposição 8 (A desigualdade das martingalas.) *Suponhamos que (X_n) seja uma martingala com relação à filtração $\mathcal{A}_n = \sigma\{X_1, \dots, X_n\}$. Isto é, $E(|X_n|) < \infty$ e $E(X_{n+1} | X_1, \dots, X_n) = X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Então*

1. $P(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} E|X_n|$ para todo $\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}$.
2. Se além disso, $E|X_n|^p < \infty$ para algum $p \geq 1$ e para todo n , então $P(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p} E|X_n|^p$.

Demonstração: Seja $A_k = \cap_{j < k} [|X_j| \leq \lambda] \cap [|X_k| > \lambda]$ para k entre 1 e n e $A = [\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > \lambda]$. Temos que A é uma união disjunta dos A_k . Portanto

$$\lambda P(A) = \sum_{k=1}^n \lambda P(A_k) \leq \sum_{k=1}^n E(|X_k| \chi_{A_k}).$$

Como A é mensurável com relação à X_1, \dots, X_k ,

$$\begin{aligned} E|X_n| &\geq \sum_{k=1}^n E(|X_n| \chi_{A_k}) = \sum_{k=1}^n EE(|X_n| \chi_{A_k} | X_1, \dots, X_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n E[\chi_{A_k} E(|X_n| | X_1, \dots, X_k)] \geq \sum_{k=1}^n E[\chi_{A_k} |E(X_n | X_1, \dots, X_k)|] = \sum_{k=1}^n E(\chi_{A_k} |X_k|). \end{aligned}$$

Assim terminamos a demonstração da primeira parte. Para demonstrar a segunda parte usamos a primeira parte e que $|X_n|^p$ é uma sub-martingala para $p \geq 1$.

A proposição anterior possui uma generalização muito importante para processos estocásticos separáveis.

Definição 18 Um processo estocástico, $(X_t)_{t \geq 0}$, é separável se existe um conjunto enumerável denso em $[0, \infty)$, $\{t_j\}_{j=1}^\infty$, e um subconjunto N de Ω de medida nula tal que para todo J , intervalo aberto de \mathbb{R}_+ ,

$$\cap_{t \in J} \{\omega \in \Omega \setminus N; X(t, \omega) \in F\} = \cap_{n: t_n \in J} \{\omega \in \Omega \setminus N; X(t_n, \omega) \in F\}$$

para todo subconjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$.

Notemos que todo processo estocástico cujas trajetórias, $t \rightarrow X_t(\omega)$ são contínuas quase certamente, é separável. A generalização prometida é a seguinte:

Proposição 9 Se $(X_t)_{t \geq 0}$ é uma martingala separável, então

$$P(\max_{0 \leq s \leq t} |X_s| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon} E|X_t|.$$

Além disso, se $E|X_s|^p < \infty$ para algum $p \geq 1$ e para todo $s \leq t$, então

$$P(\max_{0 \leq s \leq t} |X_s| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p} E|X_t|^p.$$

Não demonstrarei esta proposição.

6 Integral estocástica.

Seja $(B_t)_{t \geq 0}$, um movimento Browniano normalizado, no espaço de probabilidades (Ω, \mathcal{A}, P) . Seja $(\mathcal{A}_t)_t$ uma filtração de \mathcal{A} tal que B_s é \mathcal{A}_t mensurável se $s \leq t$ e tal que $\sigma(B_{s+t} - B_t; s \geq 0)$, a menor σ -álgebra que torna $\{B_{s+t} - B_t; s \geq 0\}$ mensuráveis, é independente de \mathcal{A}_t para todo t .

Inicialmente definiremos a integral estocástica para funções degrau. Suponha então que $f : \mathbb{R}_+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e que existam $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1} = T$ tais que $f(t, \omega) = f_i(\omega)$ se $t_i \leq t < t_{i+1}$, $0 \leq i \leq n$, $\omega \in \Omega$, sendo f_i \mathcal{A}_{t_i} mensurável. Definimos então para $\omega \in \Omega$,

$$\int_0^T f(t) dB_t(\omega) = \sum_{i=0}^n f_i(\omega)(B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega)).$$

A variável aleatória $\int_0^T f(t) dB_t$ acima definida é a integral estocástica da função degrau f com relação ao movimento Browniano $(B_t)_t$.

A classe de funções degrau é pequena demais. Nosso objetivo é estender a integral acima ao fecho em probabilidade das funções degrau.

É fácil de se verificar que a integral estocástica é linear nas funções degrau.

Lema 7 *Se f é uma função degrau tal que $f(t) \in L^2(P)$ para todo t , então*

$$E \int_0^T f(t) dB_t = 0 \text{ e } E \left(\int_0^T f(t) dB_t \right)^2 = E \int_0^T f^2(t) dt.$$

Demonstração: Para demonstrarmos a primeira igualdade notemos primeiramente que $E|f_i| \leq E(1 + |f_i|^2) = 1 + E|f_i|^2 < \infty$. Também vale que $E|B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| < \infty$. Logo usando as propriedades (5) e (6) da esperança condicional e o item (3) da definição do movimento Browniano:

$$\begin{aligned} E \int_0^T f(t) dB_t &= E \left(\sum_{i=0}^n f_i \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right) = \sum_{i=0}^n E(f_i \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})) = \\ &= \sum_{i=0}^n E(E[f_i \cdot (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) | \mathcal{A}_{t_i}]) = \sum_{i=0}^n E(f_i) \cdot E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0. \end{aligned}$$

Demonstremos agora a segunda igualdade. Vale a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \left(\int_0^T f(t) dB_t \right)^2 &= \left(\sum_{i=0}^n f_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \right)^2 = \\ &= 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} f_i f_j (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \sum_{i=0}^n f_i^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2. \end{aligned}$$

Precisamos verificar que cada parcela é integrável. Temos que $E f_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 < \infty$ por independência. Logo

$$2E|f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})| \leq E|f_i(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})|^2 + E|f_j(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})|^2 < \infty.$$

Podemos então calcular: $E \left(\int_0^T f(t) dB_t \right)^2 =$

$$\begin{aligned} & \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2E[f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] + \sum_{i=0}^n E[f_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq n} 2E[f_i f_j(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})] E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] + \sum_{i=0}^n E[f_i^2(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \\ &= \sum_{i=0}^n E[f_i^2 E(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2] = \sum_{i=0}^n E[f_i^2(t_{i+1} - t_i)] = E \int_0^T f^2(t) dt. \end{aligned}$$

Definição 19 Um processo estocástico definido em (Ω, \mathcal{A}, P) , $(f_t)_t$ é não antecipativo com relação à filtração $(\mathcal{A}_t)_t$ se

1. $(f_t)_t$ for separável
2. $(t, \omega) \rightarrow f(t, \omega)$ é mensurável com relação à $\sigma(\mathcal{B}^1 \times \mathcal{A})$.
3. $(f_t)_t$ é adaptado: f_t é \mathcal{A}_t mensurável para todo t .

Definimos então $L_\Omega^2 = L_\Omega^2[0, T]$ como o conjunto dos processos estocásticos não-antecipativos $(f_t)_t$ tais que:

$$\text{para todo } T > 0, P(\{\omega; \int_0^T |f(t, \omega)|^2 dt < \infty\}) = 1.$$

E definimos $M_\Omega^2 = \{f \in L_\Omega^2; \int_\Omega \int_0^T |f(t, \omega)|^2 dt dP(\omega) < \infty \text{ para todo } T > 0\}$. O próximo lema é fundamental para passarmos ao limite em probabilidades.

Lema 8 Para toda função degrau $f \in L_\Omega^2$ e para todo $\epsilon > 0, \delta > 0$ temos

$$P\left(\left|\int_0^T f(t) dB_t\right| > \epsilon\right) \leq P\left(\int_0^T f^2(t) dt > \delta\right) + \delta/\epsilon^2.$$

Demonstração: Seja

$$f_\delta(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se } t_k \leq t < t_{k+1} \text{ e } \sum_{i=0}^k f^2(t_i)(t_{i+1} - t_i) \leq \delta, \\ 0 & \text{se } t_k \leq t < t_{k+1} \text{ e } \sum_{i=0}^k f^2(t_i)(t_{i+1} - t_i) > \delta. \end{cases}$$

Como $P(|\int_0^T f(t)dB_t| > \epsilon) \leq P(|\int_0^T f_\delta(t)dB_t| > \epsilon) + P(\int_0^T f(t)^2(\omega)dt > \delta)$ pela desigualdade de Tchebichev, (i.e. $P(X \geq \delta) \leq (EX^2)/\delta^2$) obtemos

$$P\left(\omega; \left|\int_0^T f(t)(\omega)dB_t\right| > \epsilon\right) \leq \frac{E\left(\int_0^T f_\delta(t)dB_t(\omega)\right)^2}{\epsilon^2} + P\left(\omega; \int_0^T f^2(t)(\omega)dt > \delta\right).$$

Finalmente notemos que f_δ é uma função degrau pois $\{\omega; \sum_{i=0}^k f^2(t_i)(t_{i+1} - t_i) \leq \delta\}$ é \mathcal{A}_{t_k} mensurável. Portanto $E(\int_0^T f_\delta(t)dB_t)^2 = E\int_0^T f_\delta^2(t)dt \leq \delta$ o que termina a demonstração.

A proposição a seguir é a base para a extensão da integral de Itô a L_Ω^2 .

Proposição 10 *Para toda $f \in L_\Omega^2$ e $T > 0$ existe uma sequência $f_n \in L_\Omega^2$ de funções degrau tais que*

$$\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{q.c.} 0.$$

Além disso se $f \in M_\Omega^2$, $E\left[\int_0^T |f_n(t) - f(t)|^2 dt\right] \rightarrow 0$.

Não demonstrarei essa proposição pois sua demonstração é relativamente longa e não necessitaremos dela nada além da existência de tal sequência. Se necessário podemos supor, no lugar de funções degrau, que as funções f_n são contínuas quase certamente.

Passamos a estender a integral de Itô para L_Ω^2 . Seja então $f \in L_\Omega^2$ e $f_n \in L_\Omega^2$ uma sequência de funções degrau dadas pela proposição anterior. A sequência $(\int_0^T f_n(t)dB_t)_n$ é de Cauchy em probabilidades pois se $\epsilon > 0$,

$$P\left(\omega \in \Omega; \left|\int_0^T (f_n(t, \omega) - f_m(t, \omega))dB_t(\omega)\right| > \epsilon\right) \leq P\left(\omega; \int_0^T |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt > \delta\right) + \delta/\epsilon^2.$$

Existe então pelo lema (1), $\int_0^T f(t)dB_t$, o limite em probabilidade de $\int_0^T f_n(t)dB_t$. Este limite é único e independe da sequência de funções degrau utilizadas. Chamamos $\int_0^T f(t)dB_t$ de integral estocástica (ou integral de Itô) de f com relação ao movimento Browniano $(B_t)_t$. O teorema a seguir é imediato e não será demonstrado.

Teorema 16 *Se $f_1, f_2 \in L_\Omega^2$ e $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ então $r_1 f_1 + r_2 f_2 \in L_\Omega^2$ e*

$$\int_0^T (r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t))dB_t = r_1 \int_0^T f_1(t)dB_t + r_2 \int_0^T f_2(t)dB_t.$$

O próximo teorema nos permite calcular a média e a variância da integral de Itô.

Teorema 17 *Se $f \in M_\Omega^2$ então*

$$E \left(\int_0^T f(t) dB_t \right) = 0 \text{ e } E \left(\int_0^T f(t) dB_t \right)^2 = E \int_0^T f^2(t) dt.$$

Demonstração: Sejam $f_n \in L_\Omega^2$, $n \in \mathbb{N}$ funções degrau, tais que $E \int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt \rightarrow 0$. Vale $E \int_0^T f_n(t) dB_t = 0$ para todo n . Também $E(\int_0^T f_n(t) dB_t)^2 = E \int_0^T f_n^2(t) dt$. Temos então que $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\int_0^T f_n(t) dB_t)^2 = E \int_0^T f^2(t) dt$. Como $E(\int_0^T f_n(t) dB_t - \int_0^T f_m(t) dB_t)^2 = E \int_0^T |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \rightarrow 0$ vale portanto

$$E \left(\int_0^T f_n(t) dB_t - \int_0^T f(t) dB_t \right)^2 \rightarrow 0,$$

e

$$E \left(\int_0^T f(t) dB_t \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(\int_0^T f_n(t) dB_t \right)^2 = E \int_0^T f^2(t) dt.$$

Passarei a considerar as propriedades da integral de Itô, $I_t = \int_0^t f(s) dB_s$, como função de $t \in [0, T]$. Os próximos lemas são para demonstrar que $(I_t)_t$ é uma martingala.

Lema 9 *Se $f \in L_\Omega^2[\alpha, T]$ e X é limitada, \mathcal{A}_α mensurável então $Xf \in L_\Omega^2[\alpha, T]$ e*

$$\int_\alpha^T Xf(t) dB_t = X \cdot \int_\alpha^T f(t) dB_t.$$

Demonstração: É claro que $Xf \in L_\Omega^2[\alpha, T]$. Se f é uma função degrau a relação acima segue da definição de integral. O caso geral segue por aproximação.

Teorema 18 *Se $f \in M_\Omega^2[\alpha, T]$ então*

$$E \left(\int_\alpha^T f(t) dB_t | \mathcal{A}_\alpha \right) = 0,$$

e

$$E \left(\left| \int_\alpha^T f(t) dB_t \right|^2 | \mathcal{A}_\alpha \right) = E \left(\int_\alpha^T f^2(t) dt | \mathcal{A}_\alpha \right) = \int_\alpha^T E[f^2(t) | \mathcal{A}_\alpha] dt.$$

Demonstração: Seja X limitada, \mathcal{A}_α mensurável. Então $Xf \in M_\Omega^2[\alpha, T]$ e $E(\int_\alpha^T Xf(t) dB_t) = 0$. Logo pelo lema anterior $E(X \int_\alpha^T f(t) dB_t) = 0$ e portanto $E\{XE[\int_\alpha^T f(t) dB_t | \mathcal{A}_\alpha]\} = 0$ para todo X demonstrando que $E \left[\int_\alpha^T f(t) dB_t | \mathcal{A}_\alpha \right] = 0$. A segunda parte do teorema tem demonstração análoga.

Teorema 19 Se $f \in M_\Omega^2[0, T]$ então $I_t = \int_0^t f(s)dB_s$ é uma martingala.

Demonstração: Sejam $0 \leq t' < t \leq T$. Então de $I_t = I_{t'} + \int_{t'}^t f(s)dB_s$ vem

$$E(I_t | \mathcal{A}_{t'}) = I_{t'} + E\left(\int_{t'}^t f(s)dB_s | \mathcal{A}_{t'}\right) = I_{t'}.$$

A integral de Itô como definida pode não ser contínua em função de t . Mas no entanto, sempre pode ser modificada, num conjunto de medida zero e ser então contínua quase certamente. Inicialmente precisamos da seguinte definição:

Definição 20 Dois processos estocásticos, X e Y , são equivalentes se

$$\text{para todo } t \geq 0, P(X(t) \neq Y(t)) = 0.$$

Nesse caso dizemos que Y é uma versão de X .

Teorema 20 A integral de Itô possui uma versão contínua.

Demonstração: Seja $f \in M_\Omega^2$ e $(f_n)_n$ uma sequência de funções degrau tais que

$$E\left(\int_0^T (f(t) - f_n(t))^2 dt\right) \rightarrow 0.$$

Notemos que $I_n(t) = \int_0^t f_n(s)dB_s$, $0 \leq t \leq T$ é contínua e $I_n(t) - I_m(t)$ é uma martingala. Portanto pela desigualdade das martingalas,

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_n(t) - I_m(t)| > \epsilon\right) &\leq \frac{1}{\epsilon^2} E\left(\left|\int_0^T (f_m(s) - f_n(s))dB_s\right|^2\right) = \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} E\left(\int_0^T (f_m(s) - f_n(s))^2 ds\right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Para $\epsilon = 1/2^k$ existe n_k suficientemente grande para que

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_{n_k}(t) - I_m(t)| > 1/2^k\right) < 1/k^2 \text{ se } m \geq n_k.$$

Sem perda de generalidade n_k cresce com k . Logo

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_{n_k}(t) - I_{n_{k+1}}(t)| > 1/2^k\right) < 1/k^2,$$

e portanto, como $\sum_k 1/k^2 < \infty$, pelo lema de Borel-Cantelli obtemos

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |I_{n_k}(t) - I_{n_{k+1}}(t)| > 1/2^k \text{ infinitas vezes}\right) = 0.$$

Ou seja para quase todo ω , $|I_{n_k}(t)(\omega) - I_{n_{k+1}}(t)(\omega)| \leq 1/2^k$, $0 \leq t \leq T$. Logo com probabilidade um, $I_{n_k}(t)$ converge uniformemente para uma função contínua $J(t)$. Como $\int_0^t f_n(s)dB_s \rightarrow \int_0^t f(s)dB_s$ segue-se $J(t) = \int_0^t f(s)dB_s$ quase certamente. Suponhamos agora que $f \in L^2_\Omega[0, T]$ e definamos $f_N(t) = f(t)$ se $\int_0^t f^2(s)ds \leq N$ e $f_N(t) = 0$ caso contrário. É claro que $f_N \in M^2_\Omega[0, T]$. Seja $J_N(t) = \int_0^t f_N(s)dB_s$ uma versão contínua. E $\Omega_N = \{\omega; \int_0^T f^2(t)(\omega)dt < N\}$. Se $\omega \in \Omega_N$ e $M > N$, $f_N(t) = f_M(t)$ para $t \in [0, T]$. Temos então $J_M(t) = J_N(t)$ se $0 \leq t \leq T$. Logo $\tilde{J}(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} J_M(t)$ é contínua em t quase certamente $\omega \in \Omega_N$. Como $P(\Omega_N) \rightarrow 1$, $(\tilde{J}(t))_t$ é um processo contínuo. E de $P(\int_0^t |f(s) - f_N(s)|^2 ds > 0) = P(\int_0^t f^2(s)ds > N) \rightarrow 0$ vem $J_M(t) \xrightarrow{P} \int_0^t f(s)dB_s = I_t$.

A partir de agora somente usaremos a versão contínua da integral de Itô. Vale também o teorema a seguir, demonstrado anteriormente para funções de grau.

Teorema 21 Se $f \in L^2_\Omega$, $\epsilon > 0$, $\delta > 0$ então

$$P\left(\max_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(t)dB_t \right| > \epsilon\right) \leq P\left(\int_0^T f^2(t)dt > \delta\right) + \delta/\epsilon^2.$$

Demonstração: Definamos $\chi_\delta(z) = \chi_{(-\infty, \delta]}(z)$ e $f_\delta(t) = f(t) \cdot \chi_\delta(\int_0^t f^2(s)ds)$. Vale então que

$$\begin{aligned} & P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s)dB_s \right| > \epsilon\right) \leq \\ & \leq P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s)dB_s - \int_0^t f_\delta(s)dB_s \right| > 0\right) + P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f_\delta(s)dB_s \right| > \epsilon\right). \end{aligned}$$

Como $\int_0^t f_\delta(s)dB_s$ é uma martingala temos pela desigualdade das martingalas que:

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f_\delta(s)dB_s \right| > \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E \left| \int_0^T f_\delta(s)dB_s \right|^2 = \frac{1}{\epsilon^2} E \int_0^T f_\delta(s)^2 ds \leq \frac{\delta}{\epsilon^2}.$$

Consideremos agora a primeira parcela. Se

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \int_0^t f(s)(\omega)dB_s(\omega) - \int_0^t f_\delta(s)(\omega)dB_s(\omega) \right| > 0$$

existe \tilde{t} tal que $\int_0^{\tilde{t}} f(s)(\omega)dB_s(\omega) \neq \int_0^{\tilde{t}} f_\delta(s)(\omega)dB_s(\omega)$. Logo pela definição de f_δ , $\int_0^{\tilde{t}} f^2(s)(\omega)ds > \delta$ e portanto $\int_0^T f^2(s)ds > \delta$. QED

O próximo teorema mostra que a integral estocástica possui uma importante propriedade de continuidade.

Teorema 22 Se $f, f_n \in L^2_\Omega$ e $\int |f_n(t) - f(t)|^2 dt \xrightarrow{P} 0$ então $\int f_n(t) dB_t \xrightarrow{P} \int f(t) dB_t$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0, \rho > 0$. Temos,

$$P \left(\left| \int_0^T (f_n(t) - f(t)) dB_t \right| > \epsilon \right) \leq P \left(\int_0^T (f_n(t) - f(t))^2 dt > \epsilon^2 \rho \right) + \rho.$$

Logo, por hipótese, a primeira parcela do membro direito da desigualdade anterior tende a zero. Fazendo $\rho \rightarrow 0$ terminamos a demonstração.

Algumas integrais fáceis de calcular.

Para treinar um pouco calculemos as seguintes integrais.

1. $\int_0^T dB_t = B_T$;
2. $\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2} B_T^2 - T/2$;
3. $\int_0^T f(t) dB_t = - \int_0^T f'(t) B_t dt + f(T) B_T$ se $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é continuamente diferenciável.

A integral em (1) é imediata. Para calcular (2) seja $f_n(t, \omega) = B_{T_k/n}(\omega)$ se $k/n \leq t/T < (k+1)/n, 0 \leq k \leq n-1$. É claro que f_n é uma função degrau. Logo

$$\begin{aligned} \int f_n(t) dB_t &= \sum_{k=0}^{n-1} B_{\frac{T_k}{n}} \left(B_{\frac{T_{(k+1)}}{n}} - B_{\frac{T_k}{n}} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{\frac{T_{(k+1)}}{n}} - B_{\frac{T_k}{n}} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{\frac{T_{(k+1)}}{n}}^2 - B_{\frac{T_k}{n}}^2 \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{\frac{T_{(k+1)}}{n}} - B_{\frac{T_k}{n}} \right)^2 + \frac{1}{2} B_T^2. \end{aligned}$$

A variável aleatória, $Z_n = \sum_{k=0}^{n-1} (B_{\frac{T_{(k+1)}}{n}} - B_{\frac{T_k}{n}})^2$, tem média T e variância $\frac{2T^2}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2T^2}{n^2} \rightarrow 0$. Portanto $Z_n \xrightarrow{q.c.} T$ e então $\int B_t dB_t = \frac{1}{2} B_T^2 - T/2$. Para calcular (3) seja $f_n(t, \omega) = f(k/n), k/n \leq t/T < (k+1)/n$. Logo

$$\begin{aligned} \int f_n(t) dB_t &= \sum_{k=0}^{n-1} f(Tk/n) (B_{\frac{T_{(k+1)}}{n}} - B_{\frac{T_k}{n}}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(Tk/n) B_{\frac{T_{(k+1)}}{n}} - \sum_{k=0}^{n-1} f(Tk/n) B_{\frac{T_k}{n}} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(Tk/n) - f\left(\frac{T(k+1)}{n}\right) \right) B_{\frac{T_{(k+1)}}{n}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{T(k+1)}{n}\right) B_{\frac{T_{(k+1)}}{n}} - f(Tk/n) B_{\frac{T_k}{n}} \right) = \end{aligned}$$

$$= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Tf'(\zeta_{kn})}{n} B_{\frac{T(k+1)}{n}} + f(T)B_T,$$

sendo $\zeta_{kn} \in (Tk/n, T(k+1)/n)$. Como $t \rightarrow B_t(\omega)$ é quase certamente contínua obtemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Tf'(\zeta_{kn})}{n} B_{\frac{T(k+1)}{n}}(\omega) = \int_0^T f'(t)B_t(\omega)dt \quad \text{quase certamente.}$$

Isto termina a verificação de (3).

A fórmula de Itô.

Para demonstrarmos a fórmula de Itô necessitamos do

Teorema 23 *Suponhamos que $a_i, b_i \in L^2_\Omega$, $i = 1, 2$ e que X_1, X_2 são processos estocásticos tais que se $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$,*

$$X_i(t_2) - X_i(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a_i(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} b_i(t)dB_t \quad \text{quase certamente.}$$

Então o processo estocástico $Y = X_1X_2$ é tal que

$$Y_{t_2} - Y_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} (X_1a_2(t) + X_2a_1(t))dt + \int_{t_1}^{t_2} (X_1b_2(t) + X_2b_1(t))dB_t + \int_{t_1}^{t_2} b_2(t)b_1(t)dt.$$

Demonstração: Suponhamos primeiramente que $a_i, b_i, i = 1, 2$ são processos estocásticos independentes do tempo. Então nesse caso e $X_i = a_it + b_iB_t$

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} X_1a_2(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} X_1b_2(t)dB_t + \int_{t_1}^{t_2} X_2a_1(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} X_2b_1(t)dB_t + \int_{t_1}^{t_2} b_2b_1(t)dt = \\ & a_2 \int_{t_1}^{t_2} [a_1t + b_1B_t]dt + b_2 \int_{t_1}^{t_2} [a_1t + b_1B_t]dB_t + \\ & + a_1 \int_{t_1}^{t_2} [a_2t + b_2B_t]dt + b_1 \int_{t_1}^{t_2} [a_2t + b_2B_t]dB_t + b_1b_2(t_2 - t_1) = \\ & = a_1a_2(t_2^2 - t_1^2) + b_1b_2(t_2 - t_1) + \\ & (a_2b_1 + a_1b_2) \int_{t_1}^{t_2} B_tdt + (b_2a_1 + a_2b_1) \int_{t_1}^{t_2} tdB_t + 2b_1b_2 \int_{t_1}^{t_2} B_tdB_t = \\ & = a_1a_2(t_2^2 - t_1^2) + (a_2b_1 + a_1b_2) \left[\int_{t_1}^{t_2} B_tdt + \int_{t_1}^{t_2} tdB_t \right] + b_1b_2(B_{t_2}^2 - B_{t_1}^2) = \\ & = a_1a_2(t_2^2 - t_1^2) + (a_2b_1 + a_1b_2)(t_2B_{t_2} - t_1B_{t_1}) + b_1b_2(B_{t_2}^2 - B_{t_1}^2) = \end{aligned}$$

$$= (a_1 t_2 + b_1 B_{t_2})(a_2 t_2 + b_2 B_{t_2}) - (a_1 t_1 + b_1 B_{t_1})(a_2 t_1 + b_2 B_{t_1}).$$

Suponhamos agora que a_i, b_i são funções degrau com intervalos I_1, I_2, \dots, I_k . A fórmula de Itô vale em cada um desses intervalos. Vale portanto para quaisquer $t_1, t_2 \in [0, T]$. Façamos agora o caso geral. Sejam a_{in}, b_{in} , seqüências de funções degrau não-antecipativas tais que

$$\int_0^T |a_{in}(t) - a_i(t)| dt \xrightarrow{q.c.} 0 \quad \text{e} \quad \int_0^T |b_{in}(t) - b_i(t)|^2 dt \xrightarrow{q.c.} 0.$$

Definamos $\zeta_{in}(t) = X_i(0) + \int_0^t a_{in}(s)ds + \int_0^t b_{in}(s)dB_s$. Como $\zeta_{in} - X_i$ é uma martingala separável temos pela desigualdade das martingalas que

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\zeta_{in}(t) - X_i(t)| \xrightarrow{P} 0.$$

Existe então uma subsequência $(\zeta_{in})_n$ que converge uniformemente para X_i , quase certamente. É claro então que

$$\int_0^t \zeta_{in}(t) b_{jn}(t) dB_t \xrightarrow{P} \int_0^t X_i(t) b_j(t) dB_t.$$

É claro também que

$$\int_0^t \zeta_{in}(t) a_{jn}(t) dB_t \xrightarrow{P} \int_0^t X_i(t) a_j(t) dB_t \quad \text{e} \quad \int_0^t b_{1n}(s) b_{2n}(s) ds \rightarrow \int_0^t b_1(s) b_2(s) ds.$$

QED

Uma maneira mais fácil de se memorizar o teorema anterior é obtida com o conceito de diferencial. Se

$$\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + \int_{t_1}^{t_2} b(s)dB_s, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T,$$

dizemos que a diferencial de ζ é $d\zeta(t) = a(t)dt + b(t)dB_t$. O teorema anterior pode ser reescrito assim:

$$d(\zeta_1 \zeta_2)(t) = \zeta_1(t) d\zeta_2(t) + \zeta_2(t) d\zeta_1(t) + b_1(t) b_2(t) dt.$$

Note que a diferencial do produto é analoga à diferencial usual de um produto mais o termo adicional $b_1 b_2 dt$.

Passemos agora a demonstrar a fórmula de Itô.

Teorema 24 (A fórmula de Itô.) *Seja $(X_t)_t$ um processo estocástico tal que $dX_t = a(t)dt + b(t)dB_t$ sendo $a, b \in L^2_{\mathbb{Q}}$ e seja $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ com todas as derivadas até a segunda ordem contínuas. Então o processo estocástico $Y_t = f(X_t, t)$ é tal que, para $0 \leq u \leq v \leq T$, $Y_v - Y_u =$*

$$\int_u^v \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) a(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t) b^2(t) \right] dt + \int_u^v \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t) b(t) dB_t.$$

Ou seja, a diferencial estocástica do processo $(Y_t)_t$ é

$$dY_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)a(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, t)b^2(t) \right] dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, t)b(t)dB_t.$$

Demonstração: A demonstração será longa e a dividirei em várias etapas. Primeiramente demonstrarei por indução que

$$d(B_t)^m = mB_t^{m-1}dB_t + \frac{m(m-1)}{2}B_t^{m-2}dt,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Facilmente verificamos que a relação acima vale para $m = 1, 2$. Suponhamos a relação válida para m e demonstremos que vale para $m + 1$. Calculando $d(B_t)^{m+1}$ temos,

$$\begin{aligned} d(B_t)^{m+1} &= d(B_t^m B_t) = B_t^m dB_t + B_t d(B_t)^m + mB_t^{m-1}dt = \\ &= B_t^m dB_t + mB_t^m dB_t + \frac{m(m-1)}{2}B_t^{m-1}dt + mB_t^{m-1}dt = \\ &= (m+1)B_t^m dB_t + \frac{m(m+1)}{2}B_t^{m-1}dt, \end{aligned}$$

terminando a indução. Disto obtemos imediatamente, para toda função polinomial Q em uma variável,

$$d(Q(B_t)) = Q'(B_t)dB_t + \frac{Q''(B_t)}{2}dt.$$

Passemos agora a considerar funções da forma $G(x, t) = Q(x)g(t)$, Q um polinômio em x e g duas vezes diferenciável. Então

$$\begin{aligned} d(G(B_t, t)) &= d(Q(B_t)g(t)) = g(t)d(Q(B_t)) + Q(B_t)dg(t) + Q'(B_t) \times 0 = \\ &= g(t) \left[Q'(B_t)dB_t + \frac{Q''(B_t)}{2}dt \right] + Q(B_t)g'(t)dt = \\ &= g(t)Q'(B_t)dB_t + \left(\frac{g(t)Q''(B_t)}{2} + Q(B_t)g'(t) \right)dt. \end{aligned}$$

Reescrevendo obtemos

$$G(B_{t_2}, t_2) - G(B_{t_1}, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left[G_t + \frac{1}{2}G_{xx} \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} G_x dB_t.$$

A fórmula acima é então válida para $G = \sum_{i=1}^m f_i(x)g_i(t)$, f_i polinomial e g_i continuamente diferenciável. Pelo teorema de Stone-Weierstrass toda $f : [t_1, t_2] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes continuamente diferenciável é limite uniforme nos

compactos, de funções da forma $G = \sum_{i=1}^m f_i(x)g_i(t)$, com a convergência uniforme de todas as derivadas até a segunda ordem. Vale então

$$G_n(B_{t_2}, t_2) - G_n(B_{t_1}, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial G_n}{\partial t}(B_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_n}{\partial x^2}(B_t, t) \right] dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial G_n}{\partial x}(B_t, t) dB_t.$$

A convergência uniforme implica

$$P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial G_n}{\partial t}(B_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G_n}{\partial x^2}(B_t, t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(B_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_t, t) \right] dt.$$

(lembre-se de que $t \rightarrow B_t(\omega)$ é contínua quase-certamente e que portanto $\{B_t(\omega); t_1 \leq t \leq t_2\}$ é um conjunto compacto q.c.)

Temos também que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \left| \frac{\partial G_n}{\partial x}(B_t, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t) \right|^2 dt = 0 \text{ quase certamente.}$$

Vale então que $\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial G_n}{\partial x}(B_t, t) dB_t \xrightarrow{P} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x}(B_t, t) dB_t$. E portanto vale a fórmula de Itô para o processo estocástico B_t . Para estendermos o resultado a qualquer processo estocástico notemos primeiramente que a fórmula vale se $Y_t = f(\xi_1 + a_1 t + b_1 B_t, t)$ se ξ_1, a_1, b_1 são \mathcal{A}_{t_1} mensuráveis. A demonstração segue os mesmos passos anteriores a partir da verificação de que, se $\tilde{\xi}(t) = \xi_1 + a_1 t + b_1 B_t$

$$d(\tilde{\xi}(t))^m = m\tilde{\xi}(t)^{m-1}[a_1 dt + b_1 dB_t] + \frac{m(m-1)}{2}(\tilde{\xi}(t))^{m-2}b_1^2 dt.$$

Esses detalhes estão ao alcance de qualquer leitor que entendeu a primeira parte desta demonstração. O próximo passo é notar que se $a(t), b(t)$ são funções degrau a mesma fórmula será válida. Isto porque a fórmula é válida em cada intervalo onde $a(t), b(t)$ são constantes no tempo. Sejam agora $a(t), b(t)$ funções não-anticipativas de L_Ω^2 e $a_n, b_n \in L_\Omega^2$ sequência de funções degrau tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T |a_n(t) - a(t)| dt = 0 \text{ e } \int_0^T |b_n(t) - b(t)|^2 dt \xrightarrow{P} 0.$$

Definamos $\xi_n(t) = \xi(0) + \int_0^t a_n(s) ds + \int_0^t b_n(s) dB_s$. Vale que $\sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_n(t) - \xi(t)| \xrightarrow{P} 0$ e portanto que converge q.c. numa subsequência k_n , que para simplificar a notação, consideraremos $k_n = n$. Vale então que

$$\int_0^T \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_n(t), t) b_n(t) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), t) b(t) \right| dt \xrightarrow{P} 0$$

e portanto que

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_n(t), t) b_n(t) dB_t \xrightarrow{P} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), t) b(t) dB_t.$$

Finalmente da convergência uniforme obtemos que:

$$P - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(\xi_n(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi_n(t), t) a_n(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi_n(t), t) b_n^2(t) \right] dt =$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial f}{\partial t}(\xi(t), t) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t), t) a(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi(t), t) b^2(t) \right] dt.$$

QED

7 A fórmula de Black-Scholes

O primeiro cálculo bem sucedido do preço de um ativo derivado foi feito por Black e Scholes. O conceito fundamental usado por eles foi o de arbitragem.

Suponhamos uma economia sem custos de transação, com uma ação com preço S_t e uma opção européia com vencimento no tempo T e preço de exercício K . Suponhamos ainda que exista um ativo sem risco com preço $\beta_t = e^{rt}$, $r \geq 0$. O preço da ação tem distribuição log-normal: $S_t = S_0 e^{\alpha t + \sigma B_t}$. Pela fórmula de Itô:

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha + \sigma^2/2)dt + \sigma dB_t.$$

O valor da opção no instante T é $Y_T = \max\{S_T - K, 0\}$. Queremos calcular Y_t , $0 \leq t < T$.

Definição 21 *Uma estratégia de compra e venda é um par $(a, b) \in M_\Omega^2 \times L_\Omega^2$. A estratégia é auto-financiável se para $0 \leq t \leq T$,*

$$a_t S_t + b_t \beta_t = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 + \int_0^t a_s dS_s + \int_0^t b_s r e^{rs} ds.$$

Se (a, b) é auto-financiável e $a_T S_T + b_T \beta_T = Y_T$ então $a_0 S_0 + b_0 \beta_0$ é o preço da opção. É claro então que pelos mesmos motivos, $Y_t = a_t S_t + b_t \beta_t$ é o preço da opção no tempo t . Para calcular Y_t suporemos que $Y_t = f(S_t, t)$, f duas vezes diferenciável se $t < T$. Se a resposta obtida realmente for duas vezes diferenciável estaremos justificados. Pelo lema de Itô obtemos ($\mu = \alpha + \sigma^2/2$)

$$dY_t = \left(\mu \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) S_t + \frac{\partial f}{\partial t}(S_t, t) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t, t) S_t^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) \sigma S_t dB_t.$$

Queremos encontrar (a, b) auto-financiável tal que $a_t S_t + b_t \beta_t = Y_t$. Nesse caso teríamos

$$dY_t = a_t dS_t + b_t r e^{rt} dt = (a_t \mu S_t + b_t r e^{rt}) dt + a_t \sigma S_t dB_t.$$

Para isto ser possível temos que $a_t \sigma S_t = \sigma \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) S_t$ e portanto $a_t = \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t)$. Pela definição de (a, b) obtemos $b_t = e^{-rt}(Y_t - a_t S_t) = e^{-rt}(f(S_t, t) - \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) S_t)$. Substituindo e igualando os coeficientes em dt nas equações acima vem:

$$-rf(S_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(S_t, t) + rS_t \frac{\partial f}{\partial x}(S_t, t) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(S_t, t) = 0.$$

Ou seja é suficiente que f satisfaça a equação a derivadas parciais:

$$-rf(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + rx \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{\sigma^2 x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = 0,$$

com a condição de fronteira $f(x, T) = \max\{x - K, 0\}$. Em geral tenta-se primeiramente o método de variáveis separáveis. Neste problema entretanto a transformação $k(x, t) = y(\log(x/K) + Bt, Ct)$ permite escolhendo-se C e B obter a equação $y_t + y_{xx} = 0$. Esta equação se resolve facilmente. Pelo momento nos contentaremos em dizer que

$$f(x, t) = \frac{x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-s^2/2} ds - \frac{Ke^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z - \sigma\sqrt{T-t}} e^{-s^2/2} ds$$

sendo $z = \frac{\log(x/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} + (r + \sigma^2/2)\sqrt{T-t}/\sigma$ é a solução que procuramos. O leitor deve verificar como exercício que $\lim_{t \rightarrow T} f(x, t) = \max\{x - K, 0\}$.

8 A fórmula de Feynman-Kac.

A fórmula de Feynman-Kac permite resolver equações diferenciais parciais do tipo obtido acima como o valor esperado de certo processo estocástico. Uma formulação muito útil com certeza.

Consideremos a equação

$$-r(x, t)f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + r(x, t)x \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{\sigma^2(x, t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = 0,$$

com condição de fronteira $f(x, T) = g(x)$ para g contínua. Esse tipo de equação surge quando no lugar de termos o preço final $Y_T = \max\{S_T - K, 0\}$ temos $Y_T = g(S_T)$, a taxa de juros r e a variância σ mais gerais do que na fórmula de Black-Scholes.

Seja então Z_s^{xt} o processo estocástico definido por $Z_s^{xt} = x$ se $s \leq t$ e

$$dZ_s^{xt} = r(Z_s^{xt}, s)Z_s^{xt}ds + \sigma(Z_s^{xt}, s)dB_s \quad s > t.$$

Teorema 25 *Se r, σ, g tem módulo limitado superiormente por um polinômio em (x, t) o preço do ativo derivado cujo valor final é $Y_T = g(S_T)$ será $Y_t = f(S_t, t)$ onde f é dada por*

$$f(x, t) = E \left(e^{-\int_t^T r(Z_s^{xt}, s)ds} g(Z_T^{xt}) \right)$$

satisfaz a $f(x, T) = g(x)$ e resolve:

$$-r(x, t)f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) + r(x, t)x\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{\sigma^2(x, t)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = 0.$$

Por exemplo, para a fórmula de Black-Scholes, $Z_T^{xt} = xe^{(r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma(B_T - B_t)}$.

Verifiquemos a fórmula de Feynman-Kac, supondo que exista uma solução $f(x, t)$ da equação acima. Definamos os processos $Z_s = \int_t^s r(X_\tau, \tau)d\tau$, $Y_s = f(x, t)$ para $s \leq t$ e $Y_s = f(X_s, s)e^{-Z_s}$ se $s \geq t$, onde $X_s = Z_s^{xt}$. Temos $dZ_s = r(X_s, s)ds$ e pela fórmula de Itô obtemos que $df(X_s, s) =$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)r(X_s, s)X_s + \frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}(X_s, s)\sigma^2(X_s, s) \right] ds + \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)\sigma(Z_s^{xt}, s)dB_s.$$

Portanto

$$\begin{aligned} dY_s &= \left[\frac{\partial f}{\partial t}(X_s, s) + \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)r(X_s, s)X_s + \frac{\partial^2 f}{2\partial x^2}(X_s, s)\sigma^2(X_s, s) \right] e^{-Z_s} ds - \\ &- f(X_s, s)e^{-Z_s}r(X_s, s)ds + \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)\sigma(Z_s^{xt}, s)e^{-Z_s}dB_s + \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \times 0dt = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)\sigma(Z_s^{xt}, s)e^{-Z_s}dB_s. \end{aligned}$$

E portanto

$$Y_T - f(x, t) = \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)e^{-Z_s}dB_s.$$

$$EY_T = f(x, t) + E \int_t^T \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s)e^{-Z_s}\sigma(X_s, s)dB_s = f(x, t).$$

Acima usamos que a integral estocástica é uma martingala. Finalmente temos

$$f(x, t) = E \left[f(X_T, T)e^{-\int_t^T r(X_\tau, \tau)d\tau} \right] = E \left[e^{-\int_t^T r(X_\tau, \tau)d\tau} g(X_T) \right].$$

Terminando a verificação.

9 Integração estocástica em várias dimensões.

Definição 22 Um processo estocástico, $B(t) = (B_1(t), \dots, B_n(t))$, é um movimento Browniano de dimensão n se $B_j(t)$ é um movimento Browniano (unidimensional) para todo j , $1 \leq j \leq n$ e as σ -álgebras $\sigma\{B_j(t); t \geq 0\}$, $1 \leq j \leq n$ são independentes.

Se $b(t, \omega) = (b_{ij}(t, \omega))_{i \leq m, j \leq n}$ sendo que $b_{ij} \in L^2_\Omega$ para todo i, j a integral estocástica $\int_0^T b(t)dB(t)$ é definida por

$$\int_0^T b(t)dB(t) = \left(\sum_{j=1}^n \int_0^T b_{1j}(t)dB_j(t), \dots, \sum_{j=1}^n \int_0^T b_{mj}(t)dB_j(t) \right).$$

É claro que a integral estocástica definida acima é linear em b . É imediato que $E[\int_0^T b(t)dB(t)] = (0, \dots, 0) = 0$.

Proposição 11 Se $f, g \in M^2_\Omega$ então:

1. $E \left[\int_0^T f(t)dB_i(t) \cdot \int_0^T g(t)dB_i(t) \right] = E \left[\int_0^T f(t)g(t)dt \right].$
2. $E \left[\int_0^T f(t)dB_i(t) \cdot \int_0^T g(t)dB_j(t) \right] = 0$ se $i \neq j$.

Demonstração: O segundo item decorre imediatamente pela independência. O primeiro item demonstra-se usando a identidade $4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$.

Corolário 2 $E \left\| \int_0^T b(t)dB(t) \right\|^2 = E \left[\int_0^T \|b(t)\|^2 dt \right].$

Definição 23 Seja $(Y_t)_t$ um processo estocástico de dimensão n e suponhamos que

$$Y(t) - Y(0) = \int_0^t a(u)du + \int_0^t b(u)dB(u),$$

sendo $a = (a_1, \dots, a_m)$, $a_j \in L^1_\Omega$ e $b = (b_{ij})_{ij}$, $i \leq m, j \leq n$, $b_{ij} \in L^2_\Omega$. Dizemos que $(Y_t)_t$ tem diferencial estocástica

$$dY_t = a(t)dt + b(t)dB(t).$$

A fórmula de Itô multi-dimensional.

Teorema 26 Seja $u(x, t)$ contínua juntamente com suas derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial u}{\partial t}$.³ Seja (Y_t) um processo estocástico de dimensão m com diferencial

$$dY_t = a(t)dt + b(t)dB(t).$$

Então $u(Y_t, t)$ tem diferencial estocástica $du(Y_t, t) =$

$$\left[u_t(Y_t, t) + \sum_{i=1}^m u_{x_i}(Y_t, t)a_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m u_{x_i x_j}(Y_t, t)(bb^T)_{ij}(t) \right] dt + \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^m u_{x_i}(Y_t, t)b_{il}(t)dB_l(t).$$

³Se além disso $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ fosse contínua então u seria C^2 .

A fórmula de Itô multi-dimensional não será demonstrada. A demonstração é analoga ao caso uni-dimensional com o auxílio do seguinte lema:

Lema 10 Se $dX_t^1 = a_1(t)dt + b_1(t)dB(t)$ e $dX_t^2 = a_2(t)dt + b_2(t)dB(t)$ então

$$d(X_t^1 X_t^2) = X_t^1 dX_t^2 + X_t^2 dX_t^1 + \sum_{j=1}^n b_{1j} b_{2j} dt.$$

A demonstração do lema acima decorre da bilinearidade de $d(X_t^1 X_t^2)$ e do seguinte lema:

Lema 11 Se $i \neq j$, então $d(B_i B_j) = B_i dB_j + B_j dB_i$.

Demonstração: Seja $W_t = \frac{B_i(t) + B_j(t)}{\sqrt{2}}$. Então W_t é um movimento Browniano normalizado. Logo $W_t^2 = t + 2 \int_0^t W_t dW_t$. Usando que $W_t^2 = \frac{B_i^2 + B_j^2}{2} + B_i B_j = t + \int_0^t B_i dB_i + \int_0^t B_j dB_j + B_i B_j$ e que

$$\int_0^t W_t dW_t = \int_0^t B_i dB_i + \int_0^t B_j dB_j$$

obtemos o resultado.

Existência e unicidade de equações diferenciais estocásticas.

Seja $b(x, t) = (b_1(x, t), \dots, b_n(x, t))$ e $\sigma(x, t) = (\sigma_{ij}(x, t))_{i \leq n, j \leq n}$. Seja $(X_t)_t$ um processo estocástico tal que

$$\begin{cases} dX(t) = b(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t), \\ X(0) = \xi_0 \text{ quase certamente.} \end{cases} \quad (1)$$

Dizemos que $(X(t))$ satisfaz a equação diferencial estocástica (1) com condição inicial ξ_0 .

Teorema 27 Suponhamos b, σ como acima, definidas e mensuráveis em $\mathbb{R}^n \times [0, T]$. Suponhamos que para todo x, y, t :

$$\begin{aligned} |b(x, t) - b(y, t)| + |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| &\leq K|x - y| \text{ e} \\ |b(x, t)| + |\sigma(x, t)| &\leq K(1 + |x|). \end{aligned}$$

Suponhamos também que ξ_0 é um vetor aleatório independente de $\sigma\{B(s); s \leq T\}$. Então a equação diferencial estocástica (1) possui uma e única solução.

Não demonstrarei o teorema acima. A sua demonstração é similar à demonstração do teorema de existência de equações diferenciais ordinárias. O exemplo $dX_t = X_t^2 dt, X_0 = 1$ mostra que a hipótese de Lipschitz em b é fundamental para obtermos solução em $[0, T]$. E o exemplo $dX_t = 3X_t^{\frac{2}{3}} dt$ mostra a importância da hipótese de Lipschitz para a unicidade da solução.

O conceito de solução definido acima é às vezes chamado de solução forte. A solução fraca corresponde a dados b, σ encontrarmos $(\tilde{X}_t, \tilde{B}_t)$ definidos em (Ω, \mathcal{A}) tais que $d\tilde{X}_t = b(\tilde{X}_t, t)dt + \sigma(\tilde{X}_t, t)d\tilde{B}_t, \tilde{X}_0 = \xi_0$. Duas soluções fracas são consideradas únicas se tem a mesma distribuição. Nas condições do teorema de existência de solução forte de um sistema de equações diferenciais estocásticas há unicidade fraca também.

Processos de Markov

Definição 24 *Seja $p(s, x, t, A) \geq 0$ definida para $0 \leq s \leq t < \infty, x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que p é uma função de transição Markoviana se:*

1. $x \rightarrow p(s, t, x, A)$ é Boreleana;
2. $A \rightarrow p(s, x, t, A)$ é uma medida de probabilidades;
3. p satisfaz a equação de Chapman-Kolmogorov:

$$p(s, x, t, A) = \int_{\mathbb{R}^n} p(\lambda, y, t, A) d\nu_{s, x, \lambda}(y), \forall 0 \leq s < \lambda < t.$$

Sendo $\nu_{s, x, \lambda}(A) = p(s, x, \lambda, A)$.

Teorema 28 *Seja p uma função de transição Markoviana. E seja π uma medida de probabilidades no \mathbb{R}^n . Existe então um processo estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$, $X_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que: $P(X_s \in A) = \pi(A), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e*

$$P(X_t \in A | \sigma\{X_s; a \leq s \leq b\}) = p(b, X_b, t, A), a \leq b < t.$$

Aplicando o teorema anterior para $\pi = \delta_x, x \in \mathbb{R}^n$ obtemos uma medida de probabilidade $P_{s, x}$ num espaço Ω e $E_{s, x}$ a esperança tais que

$$P_{s, x}(X_s = x) = 1;$$

$$P_{s, x}(X_{t+h} \in A | \mathcal{F}_t^s) = p(t, X_t(\omega), t+h, A), \text{ q.c.}$$

Uma coleção $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t^s, X_t, P_{s, x})$ satisfazendo as propriedades acima, sendo p uma função de transição Markoviana é chamado de processo de Markov. Vale

$$E_{s, x}[f(X_t)] = \int f(y) d\nu_{s, x, t}(y)$$

e

$$E_{s, x}[f(X_{t+h}) | \mathcal{F}_t^s] = \int f(y) d\nu_{t, X_t, t+h}(y) = E_{t, X_t}[f(X_{t+h})].$$

Um processo de Markov é homogêneo se $p(s, x, t, A) = p(0, x, t-s, A)$.

Propriedade de Markov para difusões

Definição 25 Uma difusão de Itô, é um processo estocástico $(X_s)_s$ que satisfaz à equação diferencial estocástica:

$$\begin{cases} dX_s = b(X_s, s)ds + \sigma(X_s, s)dB_s, s \geq t \\ X_t = x. \end{cases}$$

Supomos que b, σ satisfazem as condições de Lipschitz para a existência e unicidade da solução da equação diferencial estocástica. A solução desse sistema é denotada $X_s^{t,x}, s \geq t$.

Seja $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$. Então:

$$P(X_{0,x}(t) \in A | \mathcal{F}_s) = P(X(t) \in A | X_s) = p(s, X_s, A)$$

Gerador infinitesimal de uma difusão.

Seja $(X_t)_t$ uma difusão de Itô, homogênea no tempo. O gerador infinitesimal, A , de $(X_t)_t$ é

$$(Af)(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{E_x[f(X_t)] - f(x)}{t}, x \in \mathbb{R}^n.$$

O domínio de A é o conjunto das f tal que o limite acima existe para quase todo x .

Lema 12 Seja $Y_t = Y_t^x$ tal que $dY_s = u(s)ds + v(s)dB_s, s \geq t$ e $Y_t = x$, sendo B um movimento Browniano de dimensão m , $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_{ij})_{ij}$. Seja $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ um tempo de parada com esperança $E_x[\tau] < \infty$. Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, u, v limitadas no suporte de f . Então

$$E_x[f(Y_\tau)] = f(x) + E_x \left[\int_0^\tau \left(\sum_{i=1}^n u_i(s, \omega) \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (vv^t)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s) \right) ds \right].$$

Demonstração: Seja $Z_t = f(Y_t)$. Então

$$\begin{aligned} dZ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_t) dY_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (vv^t)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s) ds = \\ &\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_t) u_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (vv^t)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(Y_s) \right) ds + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_t) v_{ij}(t) dB_j(t). \end{aligned}$$

Logo

$$f(Y_\tau) = f(x) + \int_0^\tau \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (vv^t)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] ds +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_0^\tau \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s) v_{ij}(s) dB_j(s).$$

Tomando o valor esperado terminaremos a demonstração, se

$$E_x \left[\int_0^\tau \frac{\partial f}{\partial x_i}(Y_s) v_{ij}(s) dB_j(s) \right] = 0.$$

Isto decorre do lema a seguir fazendo-se $t \rightarrow \infty$.

Lema 13 *Se $(X_t)_t$ é uma martingala contínua à direita então para todo tempo de parada τ , $(X_{\min\{t, \tau\}})_t$ é uma martingala.*

Corolário 3 *Se $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$, $X(0) = x$ e f é contínua com suporte compacto, então*

$$Af(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\sigma \sigma^t)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x).$$

Demonstração: Basta escolher $\tau = t$ e calcular o limite no lema anterior.

Corolário 4 (Fórmula de Dynkin) *Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$, τ um tempo de parada com $E_x[\tau] < \infty$. Então $E_x[f(X_\tau)] = f(x) + E_x[\int_0^\tau Af(X_s)ds]$.*

Exemplo 5 *Seja $B = (B_1, \dots, B_n)$ Browniano começando em $a \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Seja $R > |a| = \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}$. Qual o valor esperado do tempo de saída, τ_K de $(B_t)_t$ da bola $B_R(0)$? Dado $k \geq 1$ apliquemos a fórmula de Dynkin para $X_t = B_t$, $\tau = \min\{\tau_K, k\}$ e $f(x) = |x|^2$ se $|x| \leq R$, f de suporte compacto C^2 . Temos*

$$E_a[f(B_\tau)] = f(a) + E_a\left[\int_0^\tau \frac{\Delta f(B_s)}{2} ds\right] = |a|^2 + nE_a[\tau] \leq R^2.$$

Logo $E_x[\min\{\tau_K, k\}] \leq \frac{R^2 - |a|^2}{n}$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ obtemos que $E_x[\tau_K] < \infty$. Portanto podemos usar τ_K na fórmula de Dynkin obtendo $E_a[\tau_K] = \frac{R^2 - |a|^2}{n}$. Suponhamos agora que $|b| > R$. Qual a probabilidade de começando em b o Browniano atingir $B_R(0)$? Seja k o primeiro instante de saída do anel $A_k = \{x; R < |x| < 2^k R\}$. Seja $f = f_{nk}$, C^2 com suporte compacto tal que

$$f(x) = \begin{cases} -\log(|x|) & \text{se } n = 2 \\ |x|^{2-n} & \text{se } n > 2. \end{cases} \quad R \leq |x| \leq 2^k R$$

Pode-se verificar que $\Delta f = 0$ se $x \in A_k$. Pela fórmula de Dynkin $E_b[f(B_{\alpha_k})] = f(b)$. Se $p_k = P_b(|B_{\alpha_k}| = R)$, $q_k = 1 - p_k$ então se $n \neq 2$, $p_k R^{2-n} + q_k (2^k R)^{2-n} = |b|^{2-n}$. Fazendo $k \rightarrow \infty$ vem $\lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \left(\frac{|b|}{R}\right)^{2-n} < 1$. Logo $P_b(\tau_K < \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = \left(\frac{|b|}{R}\right)^{2-n}$. Dizemos que o movimento é transitivo. Para $n = 2$ temos $P(\tau_K < \infty) = 1$ (movimento recorrente).

Exemplo 6 O Browniano resolve $dX_t = dB_t$, logo $\sigma = I$ e portanto $Af = \frac{1}{2}\Delta f$.

Exemplo 7 (Gráfico do movimento Browniano) Seja $B = B_1$,
 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ solução de

$$\begin{cases} dX_1 = dt & X_1(0) = t_0 \\ dX_2 = dB & X_2(0) = x_0 \end{cases}$$

ou $dX = bdt + \sigma dB$, $X(0) = \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Então
 $Af = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

A equação retrospectiva de Kolmogorov.

Seja $(X_t)_t$ uma difusão de Itô no \mathbb{R}^n com gerador infinitesimal A . Aplicando a fórmula de Dynkin para $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e $\tau = t$ obtemos que $u(t, x) = E_x[f(X_t)]$ é diferenciável em t e $\frac{\partial u}{\partial t} = E_x[Af(X_t)]$. Podemos no entanto obter uma equação envolvendo somente u .

Teorema 29 (Equação retrospectiva de Kolmogorov) Defina $u(t, x) = E_x[f(X_t)]$.
 Então $\frac{\partial u}{\partial t} = Au$.

Demonstração: Seja $g(x) = u(t, x)$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{E_x[g(X_r)] - g(x)}{r} &= \frac{1}{r} E_x [E_{X_r} [f(X_t)] - E_x [f(X_t)]] = \\ &= \frac{1}{r} E_x [E_x [f(X_{t+r}) | \mathcal{F}_r] - E_x [f(X_t) | \mathcal{F}_t]] = \\ &= \frac{u(t+r, x) - u(t, x)}{r} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned}$$

Logo $Au = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{E_x[g(X_r)] - g(x)}{r} = \frac{\partial u}{\partial t}$.

Definição 26 (Resolvente) Para $\alpha > 0$ e $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ definimos o resolvente R_α por

$$(R_\alpha g)(x) = E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha t} g(X_t) dt \right].$$

Lema 14 $R_\alpha g \in C_b(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: De $(R_\alpha g)(x) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[g(X_t)] dt$ então a continuidade de $E_x[g(X_t)]$ em x (propriedade de Feller) garante a continuidade de $R_\alpha g$. QED

Teorema 30 Para todo $\alpha > 0$ temos $R_\alpha(\alpha - A)f = f$ se $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e se $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ então $R_\alpha g$ está no domínio de A e $(\alpha - A)R_\alpha g = g$.

Demonstração: Suponhamos que $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$. Então $R_\alpha(\alpha - A)f(x) = (\alpha R_\alpha f - R_\alpha A f)(x) =$

$$\begin{aligned} & \alpha \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[f(X_t)]dt - \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[Af(X_t)]dt = \\ & -e^{-\alpha t} E_x[f(X_t)]|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha t} \frac{d}{dt} E_x[f(X_t)]dt - \int_0^\infty e^{-\alpha t} E_x[Af(X_t)]dt = f(x). \end{aligned}$$

Suponhamos agora que $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Segue da propriedade forte de Markov

$$\begin{aligned} E_x[R_\alpha g(X_t)] &= E_x \left[E_{X_t} \left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_s) ds \right] \right] = \\ E_x \left[E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_{t+s}) ds | \mathcal{F}_t \right] \right] &= E_x \left[\int_0^\infty e^{-\alpha s} g(X_{t+s}) ds \right] = \\ & \int_0^\infty e^{-\alpha s} E_x[g(X_{t+s})] ds. \end{aligned}$$

Definindo $u(s, x) = E_x[g(X_s)]$ vem

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (E_x[R_\alpha g(X_t)] - R_\alpha g(x)) &= \int_0^\infty e^{-\alpha s} \frac{u(t+s, x) - u(s, x)}{t} ds \rightarrow \\ & \int_0^\infty e^{-\alpha s} \frac{\partial}{\partial s} u(s, x) ds. \end{aligned}$$

Logo $R_\alpha g$ pertence ao domínio do gerador infinitesimal. Assim vem que

$$(\alpha - A)R_\alpha g(x) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha s} u(s, x) ds - \int_0^\infty e^{-\alpha s} \frac{\partial}{\partial s} u(s, x) ds = g(x).$$

Teorema 31 (Fórmula de Feynman-Kac.) Seja $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$ e $v(t, x) = E_x \left[e^{-\int_0^t q(X_s) ds} f(X_t) \right]$, $q \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Então

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av - q(x)v(t, x).$$

Demonstração: Seja $Y_t = f(X_t)$, $Z_t = \exp[-\int_0^t q(X_s) ds]$. Vale que $dZ_t = -Z_t q(X_t) dt$. E portanto $d(Z_t Y_t) = Y_t dZ_t + Z_t dY_t$. Logo $v(t, x) = E_x[Y_t Z_t]$ é diferenciável em t . Portanto

$$\frac{1}{r} (E_x[v(t, X_t)] - v(t, x)) = \frac{1}{r} E_x [E_{X_r} [Z_t f(X_t)] - E_x [Z_t f(X_t)]] =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} E_x \left[E_x [f(X_{t+r} \exp[-\int_0^t q(X_{s+r}) ds] | \mathcal{A}_r] - E_x [Z_t f(X_t)] \right] = \\
& \frac{1}{r} E_x \left[Z_{t+r} \exp[\int_0^r q(X_u) du] f(X_{t+r}) - Z_t f(X_t) \right] = \\
& \frac{1}{r} E_x [f(X_{t+r}) Z_{t+r} - f(X_t) Z_t] + \frac{1}{r} E_x \left[f(X_{t+r}) Z_{t+r} \left(e^{\int_0^r q(X_u) du} - 1 \right) \right] \rightarrow \\
& \frac{\partial v}{\partial t} + q(x) v(t, x) \text{ se } r \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

E terminamos a demonstração.

10 A fórmula de Girsanov.

Começemos com uma definição.

Definição 27 Uma medida de probabilidade Q em (Ω, \mathcal{A}) é equivalente à P se $P(A) = 0$ se e somente se $Q(A) = 0$

Uma versão do teorema de Girsanov é a seguinte:

Teorema 32 Seja (X_t) um processo estocástico da forma

$$X_t = x + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s \quad 0 \leq t \leq T$$

sendo $\mu \in L^1_\Omega$, $\sigma \in L^2_\Omega$. Suponhamos que $(m_t)_t \in L^1_\Omega$ e que existe $\theta \in L^2_\Omega$, $E e^{\frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds} < \infty$, tal que $\sigma_t \theta_t = \mu_t - m_t$ $0 \leq t \leq T$. Então existe uma medida de probabilidade Q equivalente à P tal que $\hat{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ $0 \leq t \leq T$ é um movimento Browniano padronizado em (Ω, \mathcal{A}, Q) . O processo (X_t) pode ser escrito na forma

$$X_t = x + \int_0^t m_s ds + \int_0^t \sigma_s d\hat{B}_s \quad 0 \leq t \leq T.$$

Além disso, para toda variável aleatória Z , $E_Q(|Z|) < \infty$ vale $E_Q(Z) = E_P(Z \xi_T)$ sendo

$$\xi_t = e^{(-\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \theta_s^2 ds)} \quad 0 \leq t \leq T.$$

Ou seja, o processo de deslocamento de (X_t) pode ser alterado, continuando (X_t) a ser uma integral estocástica.

Exemplo 8 Suponhamos que $dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$ e que existe $\phi \in L^2_\Omega$ tal que $\sigma_t \phi_t = \mu_t$ e que $E \exp[\int_0^T \phi_t^2 dt] < \infty$ e $E \exp[-2 \int_0^T \phi_t dB_t - \int_0^T \phi_t^2 dt] < \infty$. Então existe uma medida de martingala equivalente. Com efeito: a medida equivalente é a derivada de Radon-Nykodin

$$\xi_T = \exp \left(- \int_0^T \phi_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^T \phi_s^2 ds \right)$$

dada pelo teorema de Girsanov com $m_t = 0$.

Teorema 33 *Suponhamos que $f \in L^2_\Omega$ e existe $a > 0$ tal que $Ee^{af_t^2} \leq C < \infty$ $0 \leq t \leq T$. Então*

$$Ee^{\int_{t_1}^{t_2} f(s)dB_s - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} f^2(s)ds} = 1 \quad \text{se } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T.$$

Somente demonstrarei o teorema para f limitada. Seja $Y_t = \int_{t_1}^t f(s)dB(s) - \frac{1}{2} \int_{t_1}^t |f(s)|^2 ds$. Seja $U_t = e^{Y_t}$. Temos $dU_t = e^{Y_t} f(t)dB(t)$. Logo $EU_{t_2} - 1 = E \left[\int_{t_1}^{t_2} e^{Y_t} f(t)dB(t) \right] = 0$. QED

Em geral se $f \in L^2_\Omega$ vale somente a desigualdade ≤ 1 no lugar da igualdade.

Teorema 34 (Girsanov) *Seja (X_t) um processo de Itô e $\phi \in L^2_\Omega$. Definamos*

$$\zeta_s^t(\phi) = \int_s^t \phi(u)dB_u - \frac{1}{2} \int_s^t \phi(u)^2 du,$$

$$\tilde{B}(t) = B(t) - \int_0^t \phi(s)ds \quad \text{e} \quad \tilde{P}(A) = \int_A e^{\zeta_0^T(\phi)dP}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Se $\tilde{P}(\Omega) = 1$ então \tilde{B} é um movimento Browniano em $(\Omega, \mathcal{A}, \tilde{P})$ adaptado à \tilde{B} e

$$X_t - X_s = \int_s^t (b_u + \sigma_u \phi_u) du + \int_s^t \sigma_u d\tilde{B}_u.$$

Demonstração: Para demonstrar que \tilde{B}_t é um movimento Browniano é suficiente segundo o teorema abaixo demonstrar que:

- a. $\tilde{E}[\tilde{B}_i(t) - \tilde{B}_i(s) | \mathcal{A}_s] = 0$ quase certamente se $t > s$;
- b. $\tilde{E}[(\tilde{B}_i(t) - \tilde{B}_i(s))(\tilde{B}_j(t) - \tilde{B}_j(s)) | \mathcal{A}_s] = \delta_{ij}(t-s)$ quase certamente para $t > s$.

Suporemos ϕ limitada e somente verificaremos o caso (a). A demonstração completa é longa e será omitida(ver Friedman páginas 161-162.) Notemos inicialmente que $d \left(\int_s^t f(u)dB(u) \cdot \int_s^t g(u)dB(u) \right) =$

$$\left(g(t) \cdot \int_s^t f(u)dB(u) \right) dB(t) + \left(f(t) \cdot \int_s^t g(s)dB(s) \right) dB(t) + (f(t) \cdot g(t))dt.$$

Logo

$$\begin{aligned} \left(\int_s^t f(u)dB(u) \right) \left(\int_s^t g(u)dB(u) \right) &= \int_s^t f(u) \cdot g(u)du + \\ &+ \int_s^t \left(g(u) \int_s^u f(x)dB(x) \right) dB(u) + \int_s^t \left(f(u) \int_s^u g(x)dB(x) \right) dB(u). \end{aligned}$$

Tambem precisamos de $\exp[\zeta_s^t] = 1 + \int_s^t \exp[\zeta_s^u] \phi(u)dB(u)$. Portanto

$$\tilde{E}[(\tilde{B}_i(t) - \tilde{B}_i(s)) | \mathcal{A}_s] =$$

$$\begin{aligned}
& E[(B_i(t) - B_i(s)) \exp[\zeta_s^t] | \mathcal{A}_s] - E\left[\int_s^t \phi_i(u) du \exp[\zeta_s^t] | \mathcal{A}_s\right] = \\
& E\left[(B_i(t) - B_i(s)) \left(1 + \int_s^t \exp[\zeta_s^u] \phi(u) dB_u\right) | \mathcal{A}_s\right] - E\left[\int_s^t \phi_i(u) du \exp[\zeta_s^t] | \mathcal{A}_s\right] = 0, \\
& \text{pois } E\left[\int_s^t \phi_i(u) du \exp[\zeta_s^u] | \mathcal{A}_s\right] = \int_s^t E[\phi_i(u) \exp[\zeta_s^t] | \mathcal{A}_s] du.
\end{aligned}$$

Na demonstração acima usamos a seguinte caracterização do movimento Browniano:

Teorema 35 *Seja $X_t = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ um processo estocástico contínuo e seja $(\mathcal{A}_t)_t$ uma família crescente de σ álgebras, X_t \mathcal{A}_t mensurável e tal que*

- a) $E[X_t - X_s | \mathcal{A}_s] = 0$ quase certamente, $s > t$;
- b) $E[(X_i(t) - X_i(s))(X_j(t) - X_j(s)) | \mathcal{A}_s] = \delta_{ij}(t - s)$ quase certamente.

Então $(X_t)_t$ é um movimento Browniano normalizado.

Equações diferenciais parciais elípticas e parabólicas.

10.1 Princípio do máximo para equações elípticas.

Seja L um operador diferencial definido por

$$Lu = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

sendo $u(x, t)$ definida para $x \in G$, G aberto e conexo do \mathbb{R}^n . O operador L é elíptico em x^0 se $(a_{ij}(x^0))_{ij}$ é positiva definida.

Lema 15 *Seja $(a_{ij}(x))_{ij}$ positiva semidefinida e $c(x) \leq 0$ para todo $x \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e convexo. Se $u \in C^2(D)$ e alcança um máximo positivo em $x^0 \in D$ então $Lu(x^0) \leq 0$.*

Demonstração: Seja $A = (a_{ij}(x^0))_{ij}$, $B = -(u_{x_i x_j}(x^0))_{ij}$. Então $\sum_{ij} a_{ij}(x^0) u_{x_i x_j}(x^0) \leq 0$, com $u_{x_i}(x^0) = 0$. De $c(x^0)u(x^0) \leq 0$ vem $Lu(x^0) \leq 0$. QED

Teorema 36 (Princípio fraco do máximo) *Suponha $(a_{ij}(x))$ positiva semidefinida em D , D aberto convexo e limitado, $c(x) \leq 0$. E $\frac{1}{2}a_{11}(x)\lambda^2 + b_1(x)\lambda > 0$ para algum $\lambda > 0$ e para todo $x \in D$. Se $u \in C^2(D) \cap \bar{C}^0(\bar{D})$ e $Lu \geq 0$ então $\max_{x \in \bar{D}} u(x) > 0$ implica $\sup_{x \in D} u(x) \leq \max_{x \in \partial D} u(x)$.*

Demonstração: Suponhamos para obter uma contradição que $\max_{x \in \partial D} u(x) < \max_{x \in D} u(x)$. Seja $x^0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $x_1^0 > x_1$ para todo $x \in \bar{D}$. Seja $k(x) = e^{\lambda x_1^0} - e^{\lambda x}$. É claro que $k(x) > 0$ e $Lk(x) < 0$ em D . Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, $v = u - \epsilon k$ satisfaz a $v(\bar{x}) > \max_{x \in \partial D} v(x)$. Logo, v alcança um máximo positivo para algum $x^* \in D$. Pelo lema anterior, $Lv(x^*) \leq 0$ e logo $Lu(x^*) \leq \epsilon Lk(x^*) < 0$, contradição com $Lu \geq 0$.

Definição 28 *Se existe $\mu > 0$ tal que $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)y_i y_j \geq \mu|y|^2$ para todo $x \in D$, $y \in \mathbb{R}^n$, dizemos que L é uniformemente elíptico em D .*

Teorema 37 (Princípio forte do máximo.) *Seja L uniformemente elíptico com coeficientes limitados nas partes compactas de D , e suponhamos $c(x) \leq 0$ em D . Se $u \in C^2(D)$ e $Lu \geq 0$ e u não é constante então u não tem máximo positivo em D .*

Não demonstrarei este teorema.

Problema de Dirichlet.

O problema de Dirichlet é o de encontrar u que resolve

$$\begin{cases} Lu = f(x) & x \in D \\ u(x) = \phi(x) & x \in \partial D. \end{cases}$$

Definição 29 *Uma barreira em $y \in \partial D$ é uma função contínua não-negativa, $w_y : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$, que se anula somente em y e tal que $Lw_y \leq -1$. Se existir uma bola fechada $K = B[x^0, r]$ tal que $K \cap \bar{D} = \{y\}$ então a função*

$$w_y(x) = k(|x^0 - y|^{-p} - |x - y|^{-p}),$$

é uma barreira em y para k e p suficientemente grandes.

Teorema 38 *Suponhamos L uniformemente elíptico, $c \leq 0$, a_{ij} , b_i , c , f Lipschitz em \bar{D} . Se para todo $y \in \partial D$ existir uma barreira e $\phi \in C(\partial D)$ então existe uma e única solução $u \in C^2(D) \cap C^0(\bar{D})$ do problema de Dirichlet.*

Não demonstraremos este teorema.

Definição 30 (Operador parabólico.) *O operador diferencial*

$$Mu = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t},$$

definido para $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, é uniformemente parabólico em Q se existir $\mu > 0$ tal que $(a_{ij}(x,t))_{ij}$ seja uniformemente positiva definida.

O problema de Cauchy.

Seja

$$Lu = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u,$$

um operador elíptico no \mathbb{R}^n para todo $t \in [0, T]$. Consideremos a equação parabólica

$$\begin{cases} Mu = Lu(x, t) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = f(x, t), \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

Este problema chama-se problema de Cauchy.

Teorema 39 *Suponha $(a_{ij}(x, t))_{ij}$ positiva semidefinida e suponhamos que existe $C > 0$ tal que*

$$\begin{cases} \sum_{ij} |a_{ij}(x, t)| \leq C(1 + |x|^2) \\ \sum_i |b_i(x, t)| \leq C(1 + |x|) \\ c(x, t) \leq C. \end{cases}$$

Então o problema de Cauchy tem no máximo uma solução tal que $|u(x, t)| \leq N(1 + |x|^q)$ para algum $N, q > 0$.

Definição 31 *Uma solução fundamental do operador parabólico $L - \frac{\partial}{\partial t}$ no $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ é uma função $\Gamma(x, t, \xi, \tau)$, $t > \tau$ satisfazendo a seguinte condição para toda $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$:*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t, \xi, \tau) f(\xi) d\xi; \\ Lu - \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \tau < t \leq T; \\ \lim_{t \downarrow \tau} u(x, t) &= f(x). \end{aligned}$$

A existência de solução fundamental depende de três condições:

- C1) $(a_{ij}(x, t))_{ij}$ é uniformemente elíptico;
- C2) Os coeficientes de L são contínuos limitados e $t \rightarrow a_{ij}(x, t)$ é uniformemente contínuo.
- C3) Os coeficientes de L são uniformemente contínuos à Hölder com expoente α ;

Teorema 40 *Se vale C1 – C3, existe uma solução fundamental $\Gamma(x, t, \chi, \tau)$ de $L - \frac{\partial}{\partial t}$ satisfazendo a desigualdade*

$$|D_x^m \Gamma(x, t, \chi, \tau)| \leq C(t - \tau)^{-(n+|m|/2)} \exp\left[-C \frac{|x - \chi|^2}{t - \tau}\right],$$

para $|m| = 0, 1$. E se $|m| \leq 2$, $D_x^m \Gamma$ é contínua. Além disso $L\Gamma = \Gamma_t$. Finalmente para $f \in C_b(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t, \chi, \tau) f(x) dx \rightarrow f(\chi), \text{ se } t \downarrow \tau.$$

Em condições gerais

$$u(x, t) = \int \Gamma(x, t, \chi, 0) \phi(\chi) d\chi - \int_0^t \int \Gamma(x, t, \chi, \tau) f(\chi, \tau) d\chi d\tau,$$

resolve o problema de Cauchy.

O adjunto formal de M .

O adjunto formal M^* de $M = L - \frac{\partial}{\partial t}$ ó operador

$$\begin{aligned} M^*v &= L^*v + \frac{\partial v}{\partial t}, \text{ sendo} \\ L^*v &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i^*(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_i} + c^*(x,t)v \\ b_i^* &= -b_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}, \\ c^* &= c - \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}. \end{aligned}$$

Notemos que $M^*v = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}v) - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i v) + cv + v_t$.

Definição 32 Uma solução fundamental de $L^* + \frac{\partial}{\partial t}$ é uma função $\Gamma^*(x, t, \xi, \tau)$, $t < \tau$ satisfazendo a condição: para todo $g \in C_0(\mathbb{R}^n)$,

$$v(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma^*(x, t, \xi, \tau) g(\xi) d\xi$$

satisfaz à $L^*v + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $0 \leq t < \tau$ e $\lim_{t \uparrow \tau} v(x, t) = v(x, \tau)$.

Teorema 41 Se $C1 - C3$ e

$$a_{ij}, \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}, \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} a_{ij}, \frac{\partial b_i}{\partial x_i}, c$$

são limitadas, então existe uma solução fundamental $\Gamma^*(x, t, \chi, \tau)$ de $L^* + \partial_t$ e $\Gamma(x, t, \chi, \tau) = \Gamma^*(\chi, \tau, x, t)$ se $t > \tau$.

Representação estocástica de soluções de equações diferenciais parciais.

Suponha D aberto, convexo limitado e L operador uniformemente elíptico. Suponhamos $c \leq 0$, a_{ij} , b_i e c Lipschitz. Suponhamos também que a fronteira de D é de classe C^2 . Então o problema de Dirichlet tem solução única dados f e ϕ tais que: f Lipschitz em \bar{D} , ϕ contínua em \bar{D} . Queremos representar u em termos de soluções de equações diferenciais estocásticas. Seja $\sigma(x) = \sqrt{(a_{ij}(x))}$. σ é Lipschitz em \bar{D} . Seja $dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt$. Seja τ o tempo de saída de D . Vale que

$$u(x) = E_x \left[\phi(X_\tau) \exp \left[\int_0^\tau c(X_s) ds \right] \right] - E_x \left[\int_0^\tau f(X_t) \exp \left[\int_0^t c(X_s) ds \right] dt \right].$$

Consideremos agora o problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} Lu + \frac{\partial u}{\partial t} &= f(x, t) & Q &= B \times [0, T) \\ u(x, T) &= \phi(x) & x &\in B \\ u(x, t) &= g(x, t) & S &= \partial B \times [0, T). \end{aligned}$$

Suponhamos $(a_{ij})_{ij}$ uniformemente Lipschitz, c, f uniformemente Hölder contínua, g contínua em \bar{S} , ϕ contínua em \bar{B} e $g(x, T) = \phi(x)$, $x \in \partial B$

Teorema 42 Se ∂B é C^2 então existe solução única do problema acima:

$$u(x, t) = E_{x,t} \left[g(X_\tau, \tau) e^{\int_t^\tau c(X_s, s) ds} \xi_{\tau < T} \right] + \\ E_{x,t} \left[\phi(X_T) e^{\int_t^T c(X_s, s) ds} \xi_{\tau = T} \right] - E_{x,t} \left[\int_t^\tau f(X_s, s) e^{\int_t^s c(X_\lambda, \lambda) d\lambda} ds \right].$$

Sendo τ acima o primeiro instante $\lambda \in [t, T)$ tal que $X(\lambda)$ deixa B se isto ocorrer e $\tau = T$ caso o contrário.

Seja

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b_i(x, t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

e $\Gamma_0^*(x, s, y, t)$ a solução fundamental de $L_0 + \partial_s$, $s < t$. Considerando $c = 0, f = 0$ acima obtemos que $u(x, t) = E_{x,t}[\phi(X_T)]$. Também vale que $u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0^*(x, t, y, T) \phi(y) dy$. Logo $E_{x,t}[\phi(X_T)] = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0^*(x, t, y, T) \phi(y) dy$. Analogamente para $0 \leq s < t$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma_0^*(x, s, y, t) \phi(y) dy = E_{s,x} \phi(X_t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) P_{s,x}(X_t \in dy).$$

Logo $p(s, x, t, A) = P_{s,x}(X_t \in A) = P(X_{x,s}(t) \in A)$ tem densidade $\Gamma_0^*(x, s, y, t)$. Vale que Γ_0^* satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial s} \Gamma_0^*(x, s, y, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Gamma_0^*(x, s, y, t) + \sum_i b_i(x, s) \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma_0^*(x, s, y, t) = 0.$$

Equação chamada de parabólica restropectiva. Também vale que Γ_0^* satisfaz em (y, t) a

$$-\partial_t \Gamma_0^*(x, s, y, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [a_{ij}(y, t) \Gamma_0^*] - \sum_i \frac{\partial}{\partial y_i} [b_i(y, t) \Gamma_0^*] = 0.$$

A equação acima é chamada de equação parabólica prospectiva.

11 Exercícios.

1. a) Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ um vetor aleatório. Suponha que $E[|X|^p] < \infty$, $0 < p < \infty$. Então $P(|X| \geq r) \leq \frac{1}{r^p} E[|X|^p]$.
b) Suponha que existe $k > 0$ tal que $M := E[e^{k|X|}] < \infty$. Conclua então que $P(|X| \geq r) \leq M e^{-kr}$.
2. Seja $(B_t)_{t \geq 0}$ um movimento Browniano. Então $(B_{t+s} - B_s)_{t \geq 0}$ é um movimento Browniano.

3. Seja $(B_t)_t$ um movimento Browniano bidimensional. Calcule a probabilidade de que $|B_t| \leq 1$.
4. Seja $(B_t)_t$ um movimento Browniano de dimensão n . Suponha que $K \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula. Então o tempo médio que B_t passa em K é zero.
5. Sejam $f(t), g(t) \in L^2_\Omega$. Suponha que quase certamente em $A \subset \Omega$ $f(t, \omega) = g(t, \omega)$ para todo t . Conclua então que $\int_0^T f(t, \omega) dB(\omega) = \int_0^T g(t, \omega) dB(\omega)$ para quase todo $\omega \in A$.
6. Verifique se $(X_t)_t$ é uma martingala:
 - a) $X_t = B_t + 4t$;
 - b) $X_t = t^2 B_t - 2 \int_0^t s B_s dB_s$;
 - c) $X_t = B_1(t) B_2(t)$;
 - d) $X_t = B_t^3 - 3t B_t$.
7. Obtenha a diferencial de X_t :
 - a) $X_t = 2 + t + e^{B_t}$;
 - b) $X_t = B_1^2(t) + B_2^2(t)$;
 - c) $X_t = (B_1(t) + B_2(t) + B_3(t), B_2^2(t) - B_1(t) B_3(t))$
8. (a) Seja B_t um movimento Browniano 2-dimensional com $B_0 = x \neq (0, 0)$. Mostre que $X_t = \log(|B_t|^2)$ não é uma martingala.
 (b) Mostre que $dX_t = b(t) dB_t$. O item anterior não contradiz o fato de que toda integral estocástica é uma martingala? Justifique.
9. Para $c, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $B(t)$ movimento Browniano n -dimensional mostre que a diferencial estocástica de $X_t = e^{ct + \sum_{j=1}^n \alpha_j B_j(t)}$ é $dX_t = (c + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \alpha_j^2) X_t dt + X_t \cdot (\sum_{j=1}^n \alpha_j dB_j)$.
10. Calcule a diferencial estocástica de $\log(S_t)$, e^{S_t} e $\sin(S_t)$ se $dS_t = a(t)dt + b(t)dB(t)$.
11. Seja B_t um movimento Browniano de dimensão n . Suponha que X_t seja tal que

$$dX_t = v(t, \omega) dB_t(\omega) \text{ onde } v \in \mathbb{R}^n.$$

De um exemplo no qual X_t^2 não é uma martingala. Mostre que em geral

$$M_t = X_t^2 - \int_0^t |v_s|^2 ds$$

é uma martingala.

12. Seja B_t Browniano de dimensão n e seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 . Use a fórmula de Itô para demonstrar que

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t \nabla f(B_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f(B_s) ds.$$

Acima $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ é o Laplaciano.

13. Uma classe importante de martingalas é obtida como a seguir:
Seja $dZ_t = \alpha dt + \beta dB_t$, $Z_0 = 0$ sendo α, β constantes e B_t um Browniano normalizado. Defina

$$M_t = \exp \left(Z_t - \left(\alpha + \frac{1}{2} \beta^2 \right) t \right) = \exp \left(-\frac{1}{2} \beta^2 t + \beta B_t \right).$$

Mostre que $dM_t = \beta M_t dB_t$. Em particular conclua que M_t é uma martingala. Formule condições em u e v para que a generalização a seguir seja válida: Seja $dZ_t = u(t, \omega) dt + v(t, \omega) dB_t$, $Z_0 = 0$ uma integral estocástica com valores reais. Defina

$$M_t = \exp \left(Z_t - \int_0^t \left[u(s, \omega) + \frac{1}{2} v v^T(s, \omega) \right] ds \right).$$

Então $(M_t)_t$ é uma martingala.

14. Suponha que $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 em \mathbb{R} e C^2 exceto em z_1, \dots, z_N com $|g''| \leq M$ se $x \notin \{z_1, \dots, z_N\}$. Seja B_t Browniano normalizado. Demonstre que

$$g(B_t) = g(0) + \int_0^t g'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(B_s) ds.$$

Sugestão: Tome $f_k \in C^2$ convergindo uniformemente para g com $f'_k \rightarrow g'$ uniformemente $|f''_k| \leq M$ e $f''_k \rightarrow g''$ exceto em $\{z_1, \dots, z_N\}$

15. O que acontece se tentarmos aplicar a fórmula de Itô a $g(B_t)$, B_t Browniano normalizado e $g(x) = |x|$? Modifiquemos g para ser C^2 :

$$g_\epsilon(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| \geq \epsilon \\ \frac{1}{2}(\epsilon + \frac{x^2}{\epsilon}) & \text{se } |x| < \epsilon \end{cases}$$

Aplice o exercício anterior para mostrar que

$$g_\epsilon(B_t) = g_\epsilon(0) + \int_0^t g'_\epsilon(B_s) dB_s + \frac{1}{2\epsilon} \cdot \lambda(\{s \in [0, t]; |B_s| < \epsilon\})$$

sendo $\lambda(F)$ a medida de Lebesgue de F . Demostre que

$$\int_0^t g'_\epsilon(B_s) \chi_{|B_s| < \epsilon} dB_s = \int_0^t \frac{B_s}{\epsilon} \chi_{|B_s| < \epsilon} dB_s \rightarrow 0$$

em $L^2(P)$ quando ϵ tende a zero. No limite $\epsilon \rightarrow 0$ obtenha

$$|B_t| = \int_0^t \text{sign}(B_s) dB_s + L_t(\omega),$$

onde

$$L_t = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \lambda(\{s \in [0, t]; |B_s| < \epsilon\}).$$

L_t é chamado de tempo local do movimento Browniano em 0 e a fórmula acima é a fórmula de Tanaka para o movimento Browniano.

16. Verifique que os processos a seguir resolvem as respectivas equações estocásticas para o Browniano unidimensional:

- a) $X_t = e^{B_t}$ resolve $dX_t = \frac{1}{2}X_t dt + X_t dB_t$
- b) $X_t = \frac{B_t}{t+1}$ resolve $dX_t = -\frac{1}{t+1}X_t dt + \frac{1}{t+1}dB_t$
- c) $X_t = \sin(B_t)$ resolve $dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + \sqrt{1-X_t^2}dB_t$ para $t < T(\omega) = \inf\{s > 0; B_s \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$
- d) $X_t = (t, e^t B_t)$ resolve

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{bmatrix} dB_t.$$

- e) $X_t = (\cosh(B_t), \sinh(B_t))$ resolve

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} dB_t.$$

17. Um candidato natural para o movimento Browniano na elipse é o processo $X_t = (a \cos B_t, b \sin B_t)$. Mostre que X_t é solução da equação

$$dX_t = -\frac{1}{2}X_t dt + M X_t dB_t, \text{ sendo } M = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{b} \\ \frac{b}{a} & 0 \end{bmatrix}.$$

18. Seja B_t um movimento Browniano n -dimensional, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ constantes. Resolva a equação diferencial estocástica

$$dX_t = rX_t dt + X_t \cdot \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k dB_k(t) \right); X_0 > 0.$$

19. Mostre que existe uma única solução da equação uni-dimensional:

$$dX_t = \log(1 + X_t^2)dt + \chi_{\{X_t > 0\}}X_t dB_t, X_0 = a \in \mathbb{R}.$$

20. A ponte Browniana: Para $a, b \in \mathbb{R}$ considere a equação

$$dY_t = \frac{b - Y_t}{1 - t} dt + dB_t; 0 \leq t < 1, X_0 = a.$$

Verifique que

$$Y_t = a(1 - t) + bt + (1 - t) \int_0^t \frac{dB_s}{1 - s}$$

resolve a equação e mostre que $\lim_{t \rightarrow 1} Y_t = b$.

21. Suponha que o preço de uma ação, S_t , siga o processo estocástico definido por

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dB_t, S(0) = x.$$

A ação paga dividendos à taxa $\delta(S_t, t)$ sendo portanto $D_t = \int_0^t \delta(S_u, u)du$ o processo de dividendos acumulativo. O processo de ganho é definido por $G_t = S_t + D_t$ e uma estratégia θ de compra e venda gera um processo de ganho $\int \theta dG$. Obtenha a equação a diferenças parciais deste modelo e forneça condições de regularidade suficientes para a solução de Feynman-Kac para o cálculo do ativo derivado que paga $g(S_T)$ no tempo T .

22. Suponha que $(S_t)_t$ é o preço da ação definido por

$$dS_t = \mu(S_t, t)dt + \sigma(S_t, t)dB_t; S(0) = x.$$

Há um ativo sem risco de preço $\beta_t = \exp \left[\int_0^t r(S_u, u)du \right]$ e um ativo derivado que paga $g(S_T)$ no tempo T . O processo cumulativo de dividendos é $(H_t)_t$, $H_t = \int_0^t h(S_u, u)du$. Uma estratégia (a, b) financia o ativo derivado se

$$a_t S_t + b_t \beta_t = a_0 S_0 + b_0 \beta_0 + \int_0^t a_u dS_u + \int_0^t b_u d\beta_u - H_t, t \leq T; a_T S_T + b_T \beta_T = g(S_T).$$

Obtenha a equação a diferenças parciais desse problema e aplique a fórmula de Feynman-Kac.

23. Suponha que a taxa instantânea de juros $(r_t)_t$ é limitada. O preço da ação é definido por $dS_t = \mu(S_t)dt + \sigma(S_t)dB_t$, μ e σ Lipschitz. Seja $D_t = \int_0^t \delta_t S_u du$ o processo acumulativo de dividendos, δ limitada.

- A. Suponha que há mercados para opções Européias de compra e de venda para a ação com processo de preços acima, com preço de exercício K e data de expiração T . Sejam C_0 e V_0 os respectivos preços das opções de compra e venda. Obtenha uma expressão explícita para P_0 em termos de C_0 na ausência de arbitragem e custos de transação.
- B. Suponha $r_t = 0,1$; $\delta_t = 0,08$; $T = 0,25$, $K = 50$; $S_0 = 45$. Se $C_0 = 3,75$ quanto é P_0 ?
- C. Suponha agora que o processo de dividendos (D_t) seja definido por $D_t = \int_0^t \delta_s \log(S_s) S_s ds$. Suponha que $\sigma(x) = \epsilon x$. Faça a parte (A) de novo. E calcule C_0 se $K = 35$; $S_0 = 40$; $\epsilon = 0,2$; $r_t = 0,1$ e $\delta_t = 0,08$. Justifique sua resposta.

24. Encontre o gerador infinitesimal das difusões a seguir:

- a. $dX_t = -cX_t dt + \beta dB_t$ sendo o Browniano uni-dimensional, $c > 0, \beta$ constantes. Este processo é chamado de processo de Ornstein-Uhlenbeck)

b. $dX_t = rX_t dt + dX_t dB_t$ (movimento Browniano geométrico)

c.

$$dY_t = \begin{bmatrix} dt \\ dX_t \end{bmatrix}$$

sendo $(X_t)_t$ como no item [a.]

d.

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ dt \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{X_1} \end{bmatrix} dB_t$$

sendo o Browniano uni-dimensional.

e.

$$\begin{bmatrix} dX_1 \\ dX_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dB_1 \\ dB_2 \end{bmatrix}$$

f. $X_t = (X_1, \dots, X_n)$, sendo

$$dX_k(t) = rX_k dt + X_k \cdot \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} dB_j; 1 \leq k \leq n$$

25. Encontre difusões de Itô com geradores como a seguir:

a. $Af(x) = f'(x) + f''(x)$;

b. $Af(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + cx \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \alpha^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sendo c, α constantes.

c.

$$Af(x, y) = 2y \frac{\partial f}{\partial x} + \log(1+x^2+y^2) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}(1+x^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

26. Seja B_t^x o movimento Browniano na reta começando em $x > 0$. Seja $\tau = \inf\{t > 0; B_t^x = 0\}$.

a) Demonstre que $E_x[\tau] = \infty$.

b) Demonstre que $\tau < \infty$ quase certamente.

27. Seja X_t movimento Browniano geométrico:

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t, X_0 = x > 0$$

onde o Browniano é na reta, r, α são constantes.

a. Encontre o gerador A de X_t e compute $Af(x)$ para $f(x) = x^\gamma; x > 0$.

- b. Se $r < \frac{1}{2}\alpha^2$ então $X \rightarrow 0$ se $t \rightarrow \infty$, quase certamente. Mas qual a probabilidade p de que X_t começando de $x < R$, tome o valor R ? Use a fórmula de Dynkin com $f(x) = x^{\gamma_1}$, $\gamma_1 = 1 - \frac{2r}{\alpha^2}$ para demonstrar que $p = \left(\frac{x}{R}\right)^{\gamma_1}$.
- c. Se $r > \frac{1}{2}\alpha^2$ então $X_t \rightarrow \infty$ quase certamente. Defina $\tau = \inf\{t > 0; X_t \geq R\}$. Use a fórmula de Dynkin com $f(x) = \log(x)$, $x > 0$ para demonstrar que

$$E_x[\tau] = \frac{\log \frac{R}{x}}{r - \frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Sugestão: Considere primeiro os tempos de saída de (ρ, R) , $\rho > 0$ e faça então $\rho \rightarrow 0$. É necessário encontrar estimativas para $(1 - p(\rho)) \log \rho$, sendo

$$p(\rho) = P_x[X_t \text{ alcança o valor } R \text{ antes de } \rho],$$

que podem ser obtidas dos cálculos em (a) e (b).

28. a) Escreva em termos do movimento Browniano uma solução g do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta_x g(t, x) = 0 & \text{para } t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ g(0, x) = \phi(x) \end{cases}$$

sendo $\phi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha > 0$.

- b) Seja $\psi \in C_b(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha > 0$. Encontre uma solução, u , da equação

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\Delta\right)u = \psi \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Demonstre que a solução é única.

29. Seja $B_t = (B_1(t), \dots, B_n(t))$ um movimento Browniano e seja F borealeano do \mathbb{R}^n . Demonstre que a duração total do tempo t que B_t passa em F é zero se e somente se F tem medida de Lebesgue nula.

Sugestão: Considere o resolvente R_α e faça $\alpha \rightarrow 0$.

Referências.

1. Bartle, R. G., The elements of integration, 1966, John Wiley & Sons.
2. Duffie, "Dynamic asset pricing theory", 1992, Princeton University Press
3. A. Friedman, "Stochastic differential equations and applications", vol.I, 1975, Academic Press, Nova Iorque

4. Bernt Øksendal, Stochastic Differential Equations, 3^a edição, Springer-Verlag
5. Philip Protter, Stochastic Integration and Differential Equations, A new approach, *Applications of Mathematics 21*, Springer-Verlag

12 Tabela de símbolos

Símbolo	Significado usual	Página da primeira ocorrência
$\mathcal{P}(\Omega)$	partes de Ω	4
$A \Delta B$	diferença simétrica de A e B	4
Δ	laplaciano	4
$A_n \uparrow A$	A_n cresce para A	4
Ω	conjunto/espço amostral	6
\mathcal{A}	σ -álgebra	6
$\cap_{t \in T} \mathcal{A}_t$	intersecção de σ -álgebras	6
$\sigma(\mathbf{U})$	σ -álgebra gerada por \mathbf{U}	6-Prop. 1
\mathcal{B}_n	σ -álgebra dos boreleanos do \mathbb{R}^n	6-Def. 4
$f^{-1}(B)$	imagem inversa do conjunto B	6-Def. 5
\mathcal{B}	boreleanos de \mathbb{R}	6-Def. 5
\liminf, \limsup	limite inferior, limite superior	7-Prop. 3
$\tilde{\mathcal{A}}$	complemento da σ -álgebra \mathcal{A}	8
$\int f d\mu$	integral de Lebesgue	9
$E[X]$	esperança de X	14
A_n i.v.	A_n infinitas vezes	15
$\{X_t\}_{t \geq 0}$	processo estocástico	15-Def. 16
B_t	movimento Browniano	16
$E(X \mathcal{B})$	esperança condicional	16
τ	tempo de parada	17-Def. 17
$\int_0^T f(t) dB_t(\omega)$	integral estocástica	19
L_Ω^2		20
M_Ω^2		20
dX_t	diferencial estocástica	27
Af	gerador infinitesimal	36
R_α	resolvente	38
$C_b(\mathbb{R}^n)$	funções contínuas limitadas	38
Lu	operador diferencial elíptico	42
$\Gamma(x, t, \xi, \tau)$	solução fundamental	44-Def. 31